

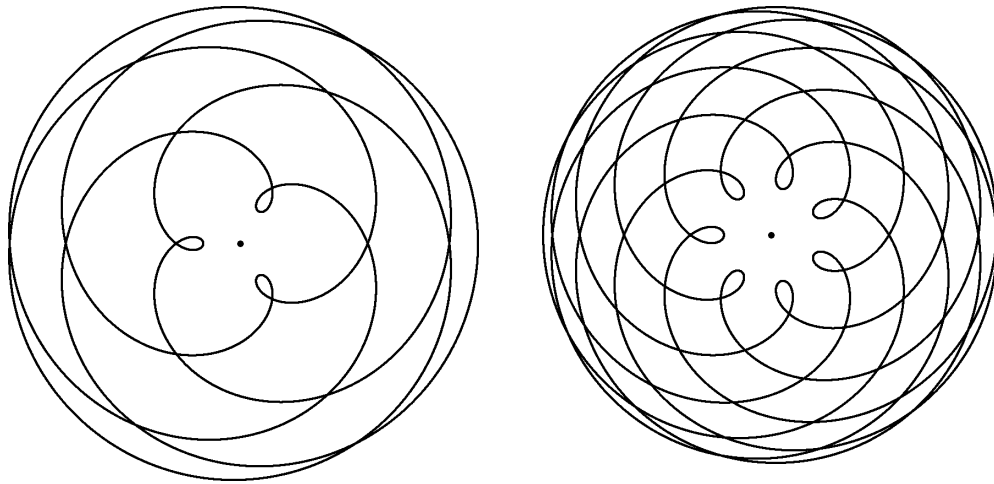


# Bulletin

---

Februar 2008 – Février 2008

N° 106



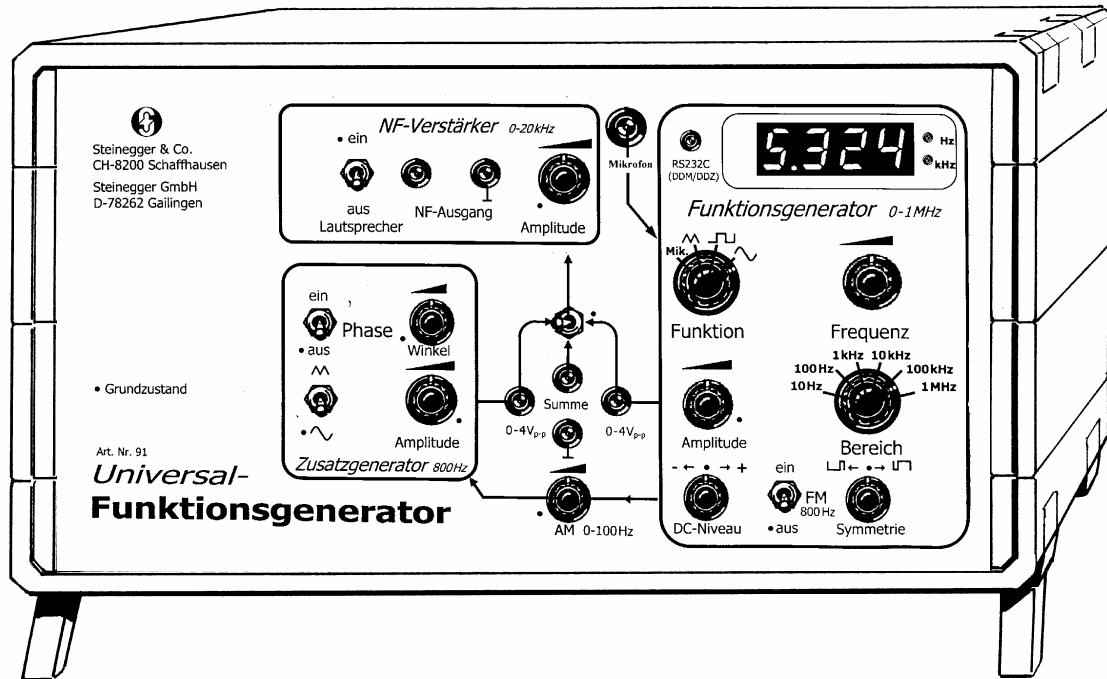
VSMP – SSPMP – SSIMF

---

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

# Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1280.--**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

**Steinegger & Co.**  
Rosenbergstrasse 23  
8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90

Fax : 052-625 58 60

Internet: [www.steinegger.de](http://www.steinegger.de)

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Hans Peter Dreyer, Président de la SSPE  
*Réponse à la lettre ouverte de Patrick Hochuli, Président de la CRM* 4

---

**Deutschschweizerische Mathematikkommission 6**



*Stefan Peer*  
 Leonhard Eulers Differentialkalkül 6

*H. U. Keller*  
 Vierfeldertafeln und Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest 17

Hilfe beim Übersetzen vom Englischen ins Deutsche gesucht 21




---

**Commission Romande de Physique 22**

*Philippe Drompt*  
 Physique et médecine 22




---

**Commission Romande de Mathématiques 25**

*Marcel Déléze*  
 De la composition de taux à l'espace vectoriel des taux 25

---

**Deutschschweizerische Physikkommission 30**



*Martin Lieberherr*  
 Kopernikanische Wende (A) 30

*Stefan Walser*  
 Rückblick: Robotik im Gymnasium - 3.-5. Oktober 2007 ETH Zürich 32

*Martin Lieberherr*  
 Kopernikus gewendet (B) 33

# Kurse

Junior Euler Society: Kursprogramm Frühling 2008 35

Robotik im Gymnasium (Wiederholung) 36

---

Impressum 39

## **Internet-Adressen – *Adresses Internet***

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

## **Page de titre**

Kopernische Wende, siehe Artikel von Martin Lieberherr Seite 30.

## **Euler-Sonderheft der Elemente der Mathematik**

---

Liebe Kolleginnen und Kollegen des VSMP und der SMG,

das Doppelmitgliedschaftsabkommen<sup>1</sup> zwischen dem Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte und der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft ist im vergangenen Herbst von den jeweiligen Generalversammlungen einstimmig angenommen worden.

Aus dem gegebenen Anlass erhalten alle Mitglieder des VSMP und der SMG mit diesem Versand gratis das Euler-Sonderheft der Elemente der Mathematik. Für (Doppel-)Mitglieder der SMG offeriert der Verlag übrigens einen Sonderpreis für das Jahres Abonnement der „Elemente“, nämlich 38 Franken plus 18 Franken Versand. Um von diesem Angebot profitieren zu können, muss das Abonnement mit dem Einzahlungsschein der SMG bestellt werden.

Sollten Sie nun Lust bekommen haben, selber ein Doppelmitglied zu werden, so können Sie sich online auf [www.math.ch](http://www.math.ch) ->members->new members, respektive auf [www.vsmg.ch](http://www.vsmg.ch) ->Anmeldung->Anmeldeformular, einschreiben.

Herzlich

Elisabeth McGarrity  
Präsidentin VSMP

Norbert Hungerbühler  
Altpräsident SMG

---

<sup>1</sup> Siehe [www.math.ch/members/reciprocity-agreements](http://www.math.ch/members/reciprocity-agreements)  
Und [www.vsmg.ch/de/anmeldung/Doppelmitgliedschaftsabkommen](http://www.vsmg.ch/de/anmeldung/Doppelmitgliedschaftsabkommen).



Ebnat-Kappel, le 28 décembre 2007

## Réponse à la lettre ouverte de Patrick Hochuli, Président de la CRM

Cher Président, chers membres de la CRM,  
Chères et chers collègues,

Lorsque je publiai, en mai 1990, le premier *bulletin* en format A4, je n'imaginai pas qu'une lettre ouverte m'y serait un jour adressée. A l'époque, le numéro 53 présenta le tout nouveau plan d'étude-cadre pour les mathématiques (en allemand), et le plan d'étude-cadre pour la physique. On publia également une prise de position commune de la Société suisse de mathématique et de physique et de la SSPMP concernant la formation des enseignants du Degré secondaire II (en allemand) ainsi que quelques remarques de Pierre Favre sur le même sujet. La question était de savoir si la formation des enseignants devait être autant axée sur la pédagogie que le souhaitait un groupe de travail de la CDIP. Estimant que les maîtres se concentraient trop souvent sur l'enseignement de leur propre discipline, ce groupe proposait que les enseignants étudient au minimum deux disciplines ainsi que la philosophie, et qu'ils soient mieux préparés à assumer un mandat d'éducation plus large. Ce point de vue fut fortement combattu. L'ORRM n'était (pas encore) à l'ordre du jour.

Revenons au présent, à la révision partielle de l'ORRM, et à la lettre ouverte. C'est vrai : les trois notes supplémentaires (cinq notes individuelles au lieu de deux combinées) et la note du travail de maturité vont réduire le poids des autres notes. C'est vrai également : le pourcentage d'heures d'enseignement de mathématiques et de sciences expérimentales a été augmenté, sans que l'on réduise pour autant les proportions des autres disciplines. C'est vrai enfin : les notes ne garantissent pas la qualité de l'enseignement.

Je pourrais faire plusieurs objections. La revalorisation de la physique favorise aussi les mathématiques. Les cantons, vu leur compétence en matière de grilles-horaires, ont tout loisir d'augmenter le nombre de périodes enseignées. L'ORRM ne peut que fixer des lignes directrices pour l'organisation de l'enseignement. Toutes les réformes ont été décidées conjointement par la CDIP et la Confédération ; mais les cantons, les directions d'établissement et les

enseignants disposent d'une grande marge de manœuvre et sont donc directement responsables de la qualité.

Je vous prie également de garder à l'esprit qu'un communiqué de presse\* se doit d'être court s'il veut avoir une chance d'être repris par les médias. Dès lors, nous avons choisi de passer sous silence les modèles démontrant que la double pondération cumulée avec la double compensation augmenterait considérablement les taux d'échec. De même, nous n'avons pas mentionné la dévalorisation de l'« introduction à l'économie et au droit », vivement regrettée par les enseignants concernés.

Le Comité central de la SSPES considère la révision partielle de la maturité comme un succès, une modification globalement positive ayant pu être effectuée en un temps raisonnable. Le tronc commun du gymnase est renforcé. Ceci conforte notre objectif principal : l'accès sans restriction aux Hautes Ecoles. Ce libre accès devra encore être défendu dans le cadre de la future révision totale de la maturité.

J'en reviens ainsi à 1990 : les critiques émanant des responsables de l'éducation à propos d'enseignants trop focalisés sur leur discipline sont malheureusement parfois fondées. Dans l'intérêt de nos élèves, des enseignants et du Gymnase en général, j'espère donc que nous resterons capables de voir au-delà des frontières de nos disciplines – et que nous continuerons de les concevoir et de les enseigner comme une partie d'un tout, d'une culture générale.

En vous souhaitant pour 2008 satisfaction et plaisir dans votre enseignement et en espérant que nous continuerons, ensemble, d'œuvrer pour des écoles de qualité, je vous adresse mes meilleurs vœux pour la nouvelle année ainsi que mes salutations les meilleures.

Hans Peter Dreyer, Président de la SSPES,  
et pour l'heure toujours enseignant de physique et mathématiques à l'Ecole Cantonale de Wattwil.

\*) [www.vsg-sspes.ch/Download/07.06\\_MEDIENMAR\\_f.pdf](http://www.vsg-sspes.ch/Download/07.06_MEDIENMAR_f.pdf)



# Leonhard Eulers Differentialkalkül \*

Stefan Peer<sup>†</sup>

Dezember 2007

## 1 Einleitung

Bereits ein flüchtiger Blick in die Literatur zeigt, dass sich Fachleute jedweder Profession, also sowohl Mathematiker als auch Wissenschaftshistoriker, uneins sind in der Beurteilung von EULERS Leistungen auf dem Gebiet der Differentialrechnung. Zwar sind Meinungsverschiedenheiten, die den Rang, die Interpretation oder die Wirkungsgeschichte wissenschaftlicher Arbeiten betreffen, beileibe nichts aussergewöhnliches. Doch überrascht in diesem Fall das Ausmass des Dissenses. Insbesondere zwei Problembereiche sind von diesem Phänomen betroffen: Die Frage nach der Originalität von EULERS Methoden und Verfahren sowie das Problem der Strenge und Genauigkeit in seinen Begriffsbildungen.

Was den ersten Problembereich betrifft, sehen einige Rezipienten EULERS hauptsächliches Verdienst darin, LEIBNIZ' Programm weiterentwickelt und zu einem (vorläufigen) Höhepunkt gebracht zu haben. Dieser Sichtweise schliesst sich unter anderen BOURBAKI mit der Bemerkung an, dass EULER „den Leibnizschen Formalismus zum Äussersten treibt“ und „das Werk von Leibniz“ vollende.<sup>1</sup> Andere billigen EULER weit mehr Eigenständigkeit zu. So sieht BOYER in seinen Werken den *locus classicus* für die einsetzende Algebraisierung der Analysis:

„Most of his predecessors had considered the differential calculus as bound up with geometry, but Euler made the subject a formal theory of functions which had no need to revert to diagrams or geometrical conceptions.“<sup>2</sup>

„It [the formalistic tendency which his work inaugurated] also made more acceptable the arithmetic interpretation which was later to clarify the calculus through the limit concept which Euler himself neglected.“<sup>3</sup>

---

\* *Anmerkung des Herausgebers*: Der erste Teil dieses Artikels erschien bereits im Bulletin 105. Wegen der besseren Lesbarkeit haben wir beschlossen diesen ersten Teil nochmals zu publizieren – zusammen mit Teil 2.

<sup>†</sup>Der Autor dieses Textes lebt in Zürich und unterrichtet Mathematik an der Kantonsschule Baden. In seiner Freizeit beschäftigt er sich unter anderem mit Philosophie, Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftstheorie.

<sup>1</sup>Nicolas Bourbaki, *Elemente der Mathematikgeschichte* (1971), S. 229.

<sup>2</sup>Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1939/49), S. 243.

<sup>3</sup>Ebd., S. 246.

Was die Frage nach der Strenge und Genauigkeit der Begriffsbildungen anbelangt, steht seit EULERS Zeiten vor allem seine Konzeption der infinitesimalen Grössen in der Kritik. So schreibt BELL:

„His [EULER’s] differentials are first and last absolute zeros whose ratios by some incomprehensible spiritualism materialize in finite, determinate numbers. As the usually courteous LAGRANGE observed, EULER’s calculus does not make sense.“<sup>4</sup>

Nicht alle Autoren sind mit BELL der Meinung, dass es beim Rechnen mit EULERS Differentialen nicht mit rechten Dingen zugeht. Seine Auffassung der Differentiale als Nullen habe zwar keinen entscheidenden Einfluss auf die weitere Entwicklung der Analysis ausgeübt, meint JUSCHKEWITSCH, doch leide sein Rechnen mit den Nullen „auch nicht an den logischen Gebrechen, die bisweilen in ihm gefunden werden.“<sup>5</sup>

Im Folgenden gebe ich eine knappe Darstellung einiger zentraler Ideen und Methoden des Differentialkalküls, wie sie in EULERS berühmten Lehrbüchern, der *Introductio in analysin infinitorum* (1748) und den *Institutiones calculi differentialis* (1755), enthalten sind. Dabei soll deutlich werden, welche Rolle EULERS Interpretation der Differentiale als absolute Nullen in seinem Kalkül spielt.

## 2 Introductio in analysin infinitorum

EULERS *Introductio* verfolgt im Wesentlichen den gleichen Zweck wie heutige Lehrbücher, die im angelsächsischen Sprachraum dann oft mit „Precalculus“ überschrieben sind: Dem Leser soll eine gründliche Einführung in die Begriffe und Verfahren gegeben werden, die für das nachfolgende Studium der Differential- und Integralrechnung unentbehrlich sind. Soweit ich die Literatur überblicke, war EULER der erste, der dabei den Begriff der Funktion ins Zentrum stellte, dadurch die bis anhin vorherrschende geometrische Terminologie aus der Analysis verbannte und zu einer weitgehenden Algebraisierung dieser Disziplin beitrug. Im Vorwort zur *Introductio* schreibt er:

„Während also die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrössen und deren Funktionen handelt, nehme ich im ersten Teil hauptsächlich die Funktionen zum Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung und zeige, wie man dieselben umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann.“<sup>6</sup>

Den Funktionsbegriff erbt EULER zweifelsohne von seinem Lehrer JOHANN BERNOULLI. Zwar findet sich die früheste dokumentierte Verwendung der Bezeichnung „Funktion“ in einem mathematischen Kontext bei LEIBNIZ, nämlich in seiner unveröffentlichten Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* (1673). Doch hatte dieser Ausdruck dort noch eine alltagsprachliche, unspezifische Bedeutung im Sinne von „funktionell“, d. h. als Aufgabe

<sup>4</sup>Eric T. Bell, *The Development of Mathematics* (1945), S. 288.

<sup>5</sup>Adolf P. Juschkewitsch, „Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis“, in: Kurt Schröder (Hg.), *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (1959), S. 224–244, hier: S. 244.

<sup>6</sup>Leonhard Euler, *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Ins Deutsche übertragen von H. Maser (1885).

oder Wirkungsweise eines Teiles innerhalb eines Ganzen. Erst im Verlauf eines Briefwechsels zwischen LEIBNIZ und BERNOULLI (1694–1698) bekam das Wort „Funktion“ allmählich die Bedeutung einer beliebigen Grösse  $X$ , die in irgendeiner Weise von einer Veränderlichen  $x$  abhängt. Schliesslich präsentierte BERNOULLI 1718 in den Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences die historisch erste, verbürgte Definition:

„On appelle fonction d’une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.“<sup>7</sup>

EULER schliesst sich im ersten Kapitel der *Introductio* der Definition seines Lehrers bis auf eine einzige Abweichung Wort für Wort an; er bestimmt die Funktion nicht als eine Quantität, sondern als einen analytischen Ausdruck (§4). Ausserdem weitet er in §3 den Argumentbereich auf imaginäre Zahlen aus. Den Begriff des analytischen Ausdrucks expliziert EULER in §6, indem er dort die Operationen aufzählt, die bei der Zusammensetzung von Grössen und Konstanten zulässig sind: die Grundrechenoperationen, das Lösen impliziter algebraischer Gleichungen, die elementaren transzendenten Operationen und die Integration. Damit hat der EULERSche Funktionsbegriff im Wesentlichen die gleiche Extension wie der heutzutage gebräuchliche Begriff der bis auf isolierte Singularitäten auf ganz  $\mathbb{C}$  analytischen Funktion.

Wie wir sehen werden, beruht EULERS Differentialkalkül darauf, dass sich prinzipiell jede in seinem Sinn verstandene Funktion in einer Potenzreihe entwickeln lässt. Beweisen kann er diese Gesetzmässigkeit nicht, doch versichert er dem Leser der *Introductio*, dass er diese Wahrheit nicht zu bezweifeln brauche. Es ist zweckmässig, an Hand eines konkreten Beispiels einige der Begriffe und Verfahren aufzuzeigen, die EULER bei Reihenentwicklungen anwendet. Meine Wahl fällt dabei auf eine prominente Passage der *Introductio*, nämlich das 7. Kapitel des 1. Bandes, wo EULER die Entwicklung der Logarithmen zur Basis  $a > 1$  herleitet und die heute nach ihm benannte Basis  $e$  einführt. Zu Beginn (§114) linearisiert EULER die Exponentialfunktion zur Basis  $a$  an der Argumentstelle Null in infinitesimaler Weise, um es in der heutigen Sprechweise auszudrücken. Zu diesem Zweck führt er eine infinitesimale Grösse  $\omega$  ein, in seinen Worten „eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch“. Und „da  $a^0 = 1$  ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt“, gilt

$$a^\omega = 1 + k\omega \tag{1}$$

beziehungsweise

$$\omega = \log(1 + k\omega), \tag{2}$$

„sofern wir  $a$  als Basis der Logarithmen nehmen“. Der endliche Wert von  $k$  hängt dabei „offenbar von der Grösse von  $a$ “ ab. Anschliessend (§115) setzt EULER Gleichung (1) in die  $i$ -te Potenz, entwickelt die rechte Seite der Gleichung nach dem binomischen Satz und erhält, „welche Zahl man auch für  $i$  setzen möge“:

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}kk\omega\omega + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots \tag{3}$$

<sup>7</sup>Johann Bernoulli, „Remarques sur ce qu’on a donné jusqu’ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres“, in: *Opera omnia*, vol. II (1742), hier: S. 241.

„Setzt man nun  $i = \frac{z}{\omega}$ , wobei  $z$  irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird  $i$ , weil  $\omega$  eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross [...]“. Mittels der Substitution von  $z$  für  $i\omega$  in (3) erhält EULER für jede beliebige Zahl  $z$  die Potenzreihe

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}kkzz + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \dots \quad (4)$$

„Da aber  $i$  eine unendliche Zahl ist, so wird  $\frac{i-1}{i} = 1$ ; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches  $\frac{i-1}{i}$  immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für  $i$  setzt [...]. Aus demselben Grund aber wird  $\frac{i-2}{i} = 1$ ,  $\frac{i-3}{i} = 1$  u. s. w.“ (§116). Diese Grenzwertbetrachtung führt EULER ausgehend von (4) zur Potenzreihe für die Exponentialfunktion und, indem er  $z = 1$  setzt, auf den logarithmischen Zusammenhang zwischen  $k$  und der Basis  $a$ :

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{kk}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (5)$$

Um die Logarithmen zu einer Basis  $a$  in unendliche Reihen entwickeln zu können, multipliziert EULER die Gleichung (2) mit  $i$ , was  $i\omega = \log(1 + k\omega)^i$  liefert, und merkt an: „[...] wenn man  $i$  geradezu unendlich gross annimmt, so wird der Wert der Potenz  $(1 + k\omega)^i$  jede beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, erreichen können. Setzt man daher  $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ , so wird  $\log(1 + x) = i\omega$  [...]“ (§118). Aus  $(1 + k\omega)^i = 1 + x$  folgt

$$i\omega = \frac{i}{k} \left( (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right)$$

und so erhält EULER

$$\log(1 + x) = \frac{i}{k} \left( (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right). \quad (6)$$

Die binomische Entwicklung von  $(1 + x)^{\frac{1}{i}}$  ergibt

$$(1 + x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}xx + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + \dots, \quad (7)$$

und „weil  $i$  eine unendlich grosse Zahl ist“, mithin also „ $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$  u. s. w.“, folgt aus (6) und (7) die Reihenentwicklung

$$\log(1 + x) = \frac{1}{k} \left( \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad (8)$$

(siehe §119). Schliesslich setzt EULER in §122 für  $k$  den Wert 1, berechnet mittels (5) die ersten 23 Dezimalen der korrespondierenden Basis, führt für diese den noch heutzutage gebräuchlichen Bezeichner „ $e$ “ ein und erwähnt, dass „die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen [...] natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt [werden], weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann.“

Was sind nun die zentralen Begriffe und Verfahrensweisen, auf die EULER bei der Herleitung von Potenzreihen zurückgreift? Erstens spielt der Begriff der unendlich kleinen und derjenige der unendlich grossen Zahl eine wichtige Rolle. Entscheidend ist dabei insbesondere, dass sich jede endliche Zahl als das Produkt einer unendlich kleinen mit einer geeigneten, unendlich grossen Zahl auffassen lässt, und dass für jede unendlich grosse Zahl  $i$  stets  $\frac{i-n}{i} = 1$  ist, sofern  $n$  einen endlichen Wert hat. Bemerkenswert ist, dass EULER keine einheitliche Terminologie durchhält: An gewissen Stellen ist anscheinend von aktual-unendlichen Zahlen die Rede, in anderen Passagen wird hingegen das Unendliche mittels eines Grenzprozesses als eine potentielle Entität aufgefasst. Wer nun hofft, in der *Introductio* eine nähere Begriffsbestimmung zu finden – sei es in Form einer Erläuterung oder gar einer Definition – oder auf ein Postulat zu stossen, das die Regeln für das Rechnen mit unendlichen Zahlen festlegt, wird enttäuscht. EULER weist im Vorwort bloss kurz und bündig darauf hin, dass er in der *Introductio* viele Fragen erledigt habe, „durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich, und ohne es selbst zu merken, vertraut wird.“ Zweitens setzt EULER geschickt das Verfahren der infinitesimalen Linearisierung ein. Ein Manuskript mit dem Titel *Johannis Bernoullii lectiones de calculo differentialem* (1691/92), das der Basler Mathematiker für seinen Schüler MARQUIS DE L'HÔPITAL verfasste, beginnt mit drei Postulaten, wobei hier nur das zweite von Interesse ist. Es besagt, dass jede krumme Linie aus unendlich vielen Geraden bestehe, die selbst unendlich klein seien. Diese Postulate und ihre Anwendungen wurden schliesslich einem breiten, mathematisch gebildeten Publikum durch das erste publizierte Lehrbuch zur Differentialrechnung bekannt, nämlich DE L'HÔPITALS *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, das 1696 veröffentlicht wurde. Offensichtlich bildet das zweite Postulat die Grundlage für infinitesimale Linearisierungen. Dies wird deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die endliche Zahl  $k$  in (1) nur von  $a$ , nicht jedoch von  $\omega$  abhängt; Beziehung (1) gilt somit für jede unendlich kleine Zahl  $\omega$ . Drittens verwendet EULER die Verallgemeinerung des binomischen Satzes auf beliebige reelle Exponenten, die auf NEWTON zurückgeht. NEWTONS 1669 vollendete, aber erst 1711 gedruckte Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* ist das eigentliche Gründungsdokument für die Untersuchung unendlicher Reihen, wobei sich die dazu gehörenden Konvergenztheorien erst im 19. Jahrhundert ausbildeten. Auch EULER ist sich nicht bewusst, dass – in unserer Terminologie – der Konvergenzradius in (7) den Wert 1 hat, sieht man einmal von der Schwierigkeit ab, dass der auftretende Exponent  $\frac{1}{i}$  unendlich klein ist. Dies zeigt sich auf Grund seiner Ausführungen in §120 der *Introductio*. Vereinfacht dargestellt, versucht er dort unter Anwendung der Reihe (8) den natürlichen Logarithmus von 10 näherungsweise zu berechnen und räumt ein, dass schwer einzusehen sei, wie

$$\log 10 = \frac{9}{1} - \frac{9 \cdot 9}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \dots$$

„sein könne, da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und miteinander vereinigt.“

### 3 Ein Dilemma

Die Infinitesimalrechnung erfuhr im 18. Jahrhundert eine stürmische Entwicklung, die eine grosse Vielfalt an beeindruckenden Anwendungen hervorbrachte. Trotz dieser Erfolge wurden die grundlegenden Begriffe und Verfahren, derer sich die damaligen Mathematiker bedienten, von Anfang an beanstandet. Einer der einflussreichsten Kritiker war der irische Philosoph GEORGE BERKELEY. In seiner Streitschrift *The Analyst*<sup>8</sup> von 1734 macht er geltend, dass weder NEWTONS Fluxionenrechnung noch LEIBNIZ' Differentialkalkül den damals in den Wissenschaften üblichen Anforderungen an die Genauigkeit und Strenge genügten. Was den Differentialkalkül betrifft, so richtet sich BERKELEYs Kritik gegen zwei grundlegende Postulate. Das erste läuft darauf hinaus, dass infinitesimale Summanden höherer Ordnung gegenüber solchen tieferer Ordnung vernachlässigt werden dürfen; das zweite besagt, dass jede krumme Linie als Polygonzug, der sich aus unendlich vielen infinitesimalen Strecken zusammensetzt, aufgefasst werden kann.<sup>9</sup> In scharfsinniger Weise illustriert BERKELEY seine Einwände an Hand des Problems, die Subtangente der Parabel  $y^2 = px$  zu bestimmen. In Ab-

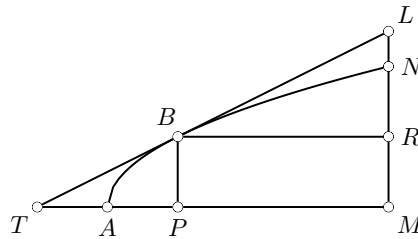


Abbildung 1: Subtangente  $PT$  an die Parabel  $ABN$

bildung 1 sei  $ABN$  der Parabelbogen mit der Gleichung  $y^2 = px$ ,  $AP = x$  die Abszisse,  $PB = y$  die Ordinate.  $PM = dx$  und  $RN = dy$  seien die zugehörigen infinitesimalen Differenzen. Die gesuchte Subtangente ist die Orthogonalprojektion  $PT$  des Tangentenabschnitts  $BT$  auf die Abszisse. Unter Annahme des zweiten Postulats des Differentialkalküls folgt, dass das infinitesimale Kurveninkrement  $BN$  mit der Tangentenstrecke  $BL$  zusammenfällt. Somit sind das differentielle Dreieck  $BRN$  und das Dreieck  $TPB$  ähnlich, folglich erhält man für die Subtangente  $PT$  den Wert  $\frac{ydx}{dy}$ . BERKELEY wendet dagegen ein:

„[...] in reality it is not the Triangle  $RNB$  but  $RLB$ , which is similar to  $PBT$ , and therefore (instead of  $RN$ )  $RL$  should have been the first term of the Proportion, *i. e.*  $RN + NL$ , *i. e.*  $dy + z$ : whence the true expression for the Subtangent should have been  $\frac{ydx}{dy+z}$ .“<sup>10</sup>

<sup>8</sup>Wieder abgedruckt in: George Berkeley, „*De Motu and The Analyst*“. Edited and translated by Douglas M. Joseph. In: *The New Synthese Historical Library*, Vol. 41 (1992).

<sup>9</sup>Siehe Marquis de l'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Vgl. auch oben, S. 5.

<sup>10</sup>George Berkeley, *The Analyst; Or, a Discourse addressed to an Infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious Mysteries and Points of Faith.* (1734), §21.

Substituiert man in  $y^2 = px$  den Ausdruck  $y + dy$  für  $y$  respektive  $x + dx$  für  $x$ , so erhält man mit Hilfe des ersten Postulats die Differentialgleichung  $dy = \frac{pdx}{2y}$ . Auch diese Kalkulation hält BERKELEYS Kritik nicht stand, denn

„[...] if you multiply  $y + dy$  by it self, and retain the whole Product without rejecting the Square of the Difference, it will then come out, by substituting the augmented Quantities in the Equation of the Curve, that  $dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dydy}{2y}$  truly.“<sup>11</sup>

Während die Regeln des Differentialkalküls für die Subtangente  $PT$  den Wert  $\frac{2y^2}{p}$  liefern, führen BERKELEYS Überlegungen auf  $PT = \frac{2y^2 dx}{pdx - dy^2 + 2yz}$ . Die Pointe in BERKELEYS Argumentation besteht in dem Nachweis, dass gemäss APOLLONIUS' Kegelschnitttheorie  $z = \frac{dy^2}{2y}$  ist (siehe §22), sich also die angeblichen Fehler, die sich bei der Berechnung von  $PT$  und  $dy$  mittels der beiden Postulate einstellen, gegenseitig aufheben. BERKELEY bezweifelt keinesfalls die Theoreme und Ergebnisse des Differentialkalküls seiner Zeit, sondern beharrt darauf, dass diese aus falschen Prämissen abgeleitet seien, wobei die Wahrheit der jeweiligen Konklusion auf einer Fehlerkompensation beruhe.

Der *Analyst* führte zu erbitterten Kontroversen, in die auch EULER verwickelt wurde. So veröffentlichte der englische Mathematiker BENJAMIN ROBINS 1739 einen Aufsatz mit dem Titel *Remarks on Mr. Euler's Treatise of Motion, Dr. Smith's compleat System of Opticks, and Dr. Jurin's Essay upon Distinct and Indistinct Vision*. Darin wirft er EULER eine fehlerhafte Vernachlässigung infinitesimaler Grössen vor und unterstellt, dass diese „[is] so strong an attachment to the principles, he had imbibed under that inelegant computist, who was his instructor, that he was afraid to trust his own understanding [...]“. EULER kannte zweifelsohne ROBBINS' Vorwürfe, war doch die soeben zitierte Passage Gegenstand eines Briefes<sup>12</sup>, den der empörte JOHANN BERNOULLI seinem ehemaligen Schüler nach Berlin sandte, nachdem dieser eine Arbeit von ROBINS über Ballistik ins Deutsche übertragen und 1745 veröffentlicht hatte. Dass EULER mit BERKELEYS kritischen Einwänden vertraut war, ist ebenfalls evident. Ohne den irischen Philosophen beim Namen zu nennen, schrieb EULER im Vorwort der *Institutiones calculi differentialis*(1755):

„[...] it has seemed that there is a distinction between absolutely nothing and a special order of quantities infinitely small, which do not quite vanish completely but retain a certain quantity that is indeed less than any assignable quantity. Concerning these, it is correctly objected that geometric rigor has been neglected. [...] if these infinitely small quantities, which are neglected in calculus, are not quite nothing, then necessarily an error must result, that will be the greater the more these quantities are heaped up. If it should happen, that the error is less, this must be attributed to a fault in the calculation whereby certain errors are compensated by other errors, rather than freeing the calculation from suspicion of error.“<sup>13</sup>

Die durch BERKELEYS *Analyst* hervorgerufenen Auseinandersetzungen haben sicher dazu beigetragen, dass EULER in den *Institutiones calculi differentialis*

<sup>11</sup>Ebd., §21.

<sup>12</sup>Leonhard Euler, *Opera omnia*, ser. IVA, vol. 1 (1975), R 226.

<sup>13</sup>Leonhard Euler, *Foundations of Differential Calculus*. Translated by John D. Blanton (2000), S. viii.

den Versuch unternahm, die Differentiale neu zu interpretieren. Dabei sah er sich, wie alle Proponenten des Differentialkalküls, einem Dilemma gegenüber: Falls man die Differentiale als unendlich kleine, aber von Null verschiedene Differenzen betrachtet, dann ist man BERKELEYS Kritik ausgesetzt. Stellt man sich dagegen auf den Standpunkt, dass alle Differentiale den Wert Null haben, so wird man mit dem schon von LEIBNIZ erhobenen Einwand konfrontiert, dass dann alle Differentialquotienten den Wert  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 1$  haben müssten, da alle Nullen gleich gross seien.

#### 4 Institutiones calculi differentialis

EULER richtet sich in den *Institutiones calculi differentialis* gegen das zweite Horn des Dilemmas und führt aus, dass wenigstens in gewissen Fällen die Division von Null durch Null sinnvoll erklärt werden könne. Zu diesem Zweck führt er die Unterscheidung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Verhältnis zweier Nullen ein. Während das arithmetische Verhältnis, das heisst die Differenz zweier Nullen stets Null sei, könne das geometrische Verhältnis, das ist der Quotient, eine von Eins verschiedene Zahl sein:

„Everyone knows that when zero is multiplied by any number, the product is zero and that  $n \cdot 0 = 0$ , so that  $n : 1 = 0 : 0$ . Hence, it is clear that any two zeros can be in a geometric ratio, although from the perspective of arithmetic, the ratio is always of equals.“<sup>14</sup>

EULER legt zunächst am Beispiel der Proportion  $y = ax$  dar, dass der Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$ , aufgefasst als geometrisches Verhältnis zweier Nullen, einen eindeutig bestimmmbaren Wert hat:

„[...]  $dx$  indicates a quantity that is infinitely small, so that both  $dx = 0$  and  $adx = 0$ , where  $a$  is any finite quantity. Despite this, the geometric ratio  $adx : dx$  is finite, namely  $a : 1$ . For this reason, these two infinitely small quantities  $dx$  and  $adx$ , both being equal to 0, cannot be confused when we consider their ratio.“<sup>15</sup>

Anschliessend weist er darauf hin, „that the infinitely small vanishes in comparison with the finite and hence can be neglected“ (§87). Denn aus  $ndx = 0$  folge einerseits  $a \pm ndx - a = 0$  und andererseits sei offensichtlich, dass  $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$ . Das Prinzip, wonach infinitesimale Grössen höherer Ordnung gegenüber solchen tieferer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, ist bei EULER folgerichtig kein Postulat mehr, sondern ein begründungspflichtiger Hilfssatz. Für den Spezialfall der Differentiale  $dx$  und  $dx^2$  argumentiert EULER wie folgt:

„The ratio of  $dx \pm dx^2$  to  $dx$  is that of equals, whether the comparison is arithmetic or geometric. There is no doubt about the arithmetic; in the geometric comparison,  $dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$ .“<sup>16</sup>

<sup>14</sup>Ebd., §85.

<sup>15</sup>Ebd., §86.

<sup>16</sup>Ebd., §88.

EULERS Formulierungen über die Differentiale als Nullen hinterlassen beim heutigen Leser zweifelsohne einen merkwürdigen Eindruck. Geht es jedoch jenseits polemischer Einlassungen um eine angemessene Würdigung seiner Interpretation der Differentiale, so sollte man sich hüten, auf Grund einer oberflächlichen Kritik der Terminologie ein Urteil zu fällen. Von entscheidender Bedeutung für die Bewertung von EULERS Beitrag ist vielmehr die Frage, ob seine Interpretation zu sinnvollen Handlungsanleitungen für das Rechnen mit Differentialen führt. Mit anderen Worten: Relevant ist, was EULER *tut*. Seine Interpretation der Differentiale als Nullen läuft letztlich auf die Praxis hinaus, einen Differentialquotienten – unter anderem durch Kürzen mit  $dx$  – so umzuformen, dass ihm ein sinnvoller Wert zugeordnet werden kann, wenn  $dx = 0$  und folglich  $dy = 0$  ist. Diese Praxis ergibt im Kontext von EULERS Funktionsbegriff auch vor dem Hintergrund der heutigen Mathematik einen Sinn. Wie im zweiten Abschnitt des vorliegenden Aufsatzes dargelegt wird, benennt EULER mit dem Ausdruck *Funktion* ungefähr dasselbe, was man in heutiger Terminologie unter einer bis auf isolierte Singularitäten analytischen Funktion versteht. Ist nun  $y = f(x)$  die Gleichung einer solchen Funktion, die in einer Umgebung von  $x_o$  analytisch ist, so ist der dazugehörige Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

an der Stelle  $x = x_o$  hebbbar. EULER bestimmt den Differentialquotienten an der Stelle  $x_o$  nicht, indem er – wie es heutzutage üblich wäre – die Singularität des Differenzenquotienten mittels des Grenzübergangs  $x \rightarrow x_o$  hebt, sondern indem er den Differenzenquotienten mit Hilfe geeigneter Termumformungen transformiert und anschliessend an der Stelle  $x = x_o$  auswertet. Beide Methoden führen natürlich zu den gleichen Ergebnissen.

EULER verallgemeinert dieses Verfahren zu einem universellen Ableitungsalgorithmus. Dieser beruht darauf, dass sich prinzipiell jede in seinem Sinn verstandene Funktion in einer Potenzreihe entwickeln lässt. Bezeichnet nämlich  $\omega = \Delta x$  ein beliebiges Inkrement und  $y^1$  den Wert einer gegebenen Funktion  $y$  an der Stelle  $x + \omega$ , so lässt sich  $\Delta y = y^1 - y$  gemäss EULER in einer Potenzreihe der Form

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \dots \quad (9)$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten  $P, Q, R, S, \dots$  Funktionen in  $x$  sind.<sup>17</sup> Ersetzt man in (9) das endliche Inkrement  $\omega$  durch das Differential  $dx$  und entsprechend  $\Delta y$  durch  $dy$ , so erhält man für den Differentialquotienten den Koeffizienten  $P$ .<sup>18</sup> Die methodologische Pointe besteht modern ausgedrückt darin, dass die erste Ableitung als Koeffizient des in  $\omega$  linearen Gliedes berechnet wird. Zu diesem Zweck dehnt EULER ohne weitere Erörterung den Begriff des geometrischen Verhältnisses zweier Nullen auf die Fälle aus, bei denen der Zähler eine unendliche Reihe ist<sup>19</sup> – eine Verallgemeinerung, die natürlich keinesfalls selbstverständlich ist.

Zum Schluss werde ich EULERS Verfahren an Hand einer konkreten transzendenten Funktion, nämlich des natürlichen Logarithmus, illustrieren. Mit Hilfe

<sup>17</sup>Ebd., §20 ff.

<sup>18</sup>Vgl. ebd., §120 f.

<sup>19</sup>Ebd., §113.

der Logarithmengesetze findet EULER für die Differenz  $\Delta y$  den Ausdruck

$$y^I - y = \log(x + \omega) - \log x = \log\left(1 + \frac{\omega}{x}\right),$$

was sofort

$$dy = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) \quad (10)$$

liefert. Anschliessend setzt er in der Reihenentwicklung (8) für  $k$  den Wert 1, um den Logarithmus zur natürlichen Basis  $e$  zu erhalten.<sup>20</sup> Die Substitution von  $\frac{dx}{x}$  für  $x$  in (8) führt ihn vermöge von (10) auf

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx dx}{2xx} + \frac{dx^3}{3x^3} - \dots,$$

woraus EULER mit den Worten schliesst:

„Since all of the terms of this series vanish in the presence of the first term, we have  $dy = \frac{dx}{x}$ .“<sup>21</sup>

## 5 Zusammenfassung

EULERS Versuch, die Differentiale als absolute Nullen neu zu interpretieren, ist eine Reaktion auf die Einwände einiger seiner Zeitgenossen gegen die damaligen Grundlagen des Differentialkalküls. Im Kontext seines Funktionsbegriffs führt er zusammen mit der Reihenentwicklung auf ein originelles allgemeines Ableitungsverfahren. Wohl greift EULER bei der Reihenentwicklung von Funktionen auf Vorstellungen über Grenzwertprozesse zurück, sein Begriff des Differentials beziehungsweise Differentialquotienten ist jedoch frei von solchen Konnotationen. Stattdessen interpretiert EULER den Differentialquotienten als einen analytischen Ausdruck in  $dx$ , der durch geeignete algebraische Umformungen so hergerichtet werden soll, dass er an der Stelle  $dx = 0$  sinnvoll ausgewertet werden kann. Diesem Konzept wird man kaum vorwerfen können, es setze einen obskuren Spiritualismus voraus.<sup>22</sup> Im Gegenteil, dank seines vergleichsweise engen Funktionsbegriffs führen EULERS Ansichten über die Differentiale zu einfachen, unmissverständlichen Handlungsanleitungen, die sich auch vor dem Hintergrund der heutzutage üblichen, mathematischen Praxis rechtfertigen lassen. Dass sich sein Verfahren auf den gegenwärtig gebräuchlichen, allgemeinen Funktionsbegriff nicht anwenden lässt, wird man ihm nicht anlasten können. Es war seinerzeit für eine andere Konzeption von Differentialrechnung gedacht – begriffliche Konstrukte sollten im Rückblick wohl danach beurteilt werden, ob sie sich im damaligen Kontext und Begriffsrahmen bewährten.

<sup>20</sup>Siehe oben, zweiter Abschnitt, S. 4.

<sup>21</sup>Vgl. Leonhard Euler, *Foundations of Differential Calculus*. Translated by John D. Blanton (2000), §180.

<sup>22</sup>Vgl. Eric T. Bells Zitat auf S. 2.

## Vierfeldertafeln und Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

### Abstract

Werden in einer statistischen Erhebung zwei Merkmale A und B untersucht, die bei jeder Beobachtung entweder vorhanden sind oder nicht, können die Resultate in einer Vierfeldertafel (engl.: four-fold table, 2x2 frequency table, contingency table) zusammengefasst werden. Mit einem Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest ( $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest) kann die Unabhängigkeit zwischen diesen Merkmalen A und B geprüft werden. Als Erweiterung ist dies auch möglich, wenn das Merkmal A in  $k_A$  und das Merkmal B in  $k_B$  verschiedenen Ausprägungen vorkommt.

Die für eine Behandlung im Unterricht notwendige Theorie wird für die Vierfeldertafeln an Beispielen entwickelt und zusammengestellt. Die Eigenschaften der Normalverteilung sowie der  $\chi^2$ -Verteilung sollten bereits bekannt oder wenigstens – beispielsweise mit geeigneten Simulationen – plausibel gemacht worden sein.

### 1. Zusammenhang zweier Merkmale

Bei vielen einfachen, in der Praxis häufig vorkommenden statistischen Erhebungen werden zwei Merkmale A und B untersucht, die bei jeder Beobachtung entweder vorhanden sind oder nicht. Es stellt sich die Frage, ob auf Grund einer solchen Stichprobe die Nullhypothese  $H_0$ : "Die Merkmale A und B sind unabhängig voneinander" weiter beibehalten werden muss, oder ob sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$ : "Die Merkmale A und B sind nicht unabhängig voneinander" verworfen werden darf, was bedeutet, dass – mit dem unvermeidbaren Fehler 1. Art – auf einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Merkmalen in der Grundgesamtheit geschlossen werden darf.

Die Unabhängigkeit der beiden Merkmale kann mit einem Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest ( $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest) geprüft werden. Als Faustregel sollte dabei aber jede der erwarteten Häufigkeiten mindestens 5 und keine dieser Häufigkeiten Null sein, wodurch 20 die minimale untere Grenze der Beobachtungsanzahl in der Stichprobe darstellt. Für kleinere Werte muss die Kontinuitätskorrektur nach Yates (Frank Yates, 1902 – 1994) oder Fisher's exakter Test (R. A. Fisher, 1890 – 1962) verwendet werden, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll.

Das Vorgehen und die notwendigen Rechenschritte werden an Hand von Beispielen demonstriert.

### 2. Ein Beispiel: Rauchen Männer häufiger als Frauen?

In einer Stichprobe seien 100 Frauen und Männer danach gefragt worden, ob sie rauchen.

Wir nehmen folgende Zahlen als Resultat dieser fiktiven Umfrage an:

Merkmale:	A (Rauchend):	$\bar{A}$ (Nicht rauchend):	Total Zeilen:
$B$ (Mann):	a = 20	b = 40	a + b = 60
$\bar{B}$ (Frau):	c = 8	d = 32	c + d = 40
Total Spalten:	a + c = 28	b + d = 72	n = a+b+c+d = 100

**Tabelle 1: Vierfeldertabelle für die Merkmale A: "Rauchend" und B: "Mann"**

Aus der Tabelle wird klar, dass bei gegebenen, festen Zeilen- und Spalten-Summen (s. Tabelle 1: "Total Zeilen", resp. "Total Spalten") nur eine einzige der vier Zahlen a, b, c und d gegeben sein muss, woraus sich die anderen drei dann zwangsläufig ergeben: Dies gibt bereits einen ersten Hinweis auf die so genannte "Anzahl der Freiheitsgrade".

Nach der Nullhypothese  $H_0$  sind die beiden zu A resp. B gehörigen Ereignisse voneinander unabhängig, woraus nach dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten folgt:

$$H_0: P(A|B) = P(A) \quad (\text{Gl. 1})$$

Diese Wahrscheinlichkeiten müssen aus den relativen Häufigkeiten geschätzt werden. Es müsste also – bei gültiger Nullhypothese  $H_0$  – angenähert gelten:

$$\frac{a}{a+b} \approx \frac{a+c}{n} \quad (\text{Gl. 2})$$

Analoge Beziehungen ergeben sich für b, c und d.

### 3. Zu erwartende Werte

Für eine normalverteilte Grösse  $x$  mit Mittelwert 0 und Streuung 1 hat  $x^2$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit dem Freiheitsgrad 1. Die kumulierten Werte dieser Verteilung sind tabelliert, und die zugehörigen Verteilungsfunktionen finden sich in vielen Büchern über Statistik; die benötigten Werte könnten bei Bedarf aber auch mit einer geeigneten Simulation gefunden werden. Weitergehende Kenntnisse des Funktionsverlaufs sind hier nicht nötig. Gebraucht wird hingegen der folgende Satz:

Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängige, normalverteilte Grössen mit Mittelwert 0 und Streuung 1, so hat die Summe der Quadrate  $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden. Ist die Streuung nicht 1, sondern  $\sigma$ , so ist klar, dass die Grösse

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma^2} \quad (\text{Gl. 3})$$

verwendet werden muss.

Der unter der Hypothese  $H_0$  zu erwartende Wert  $a_e$  von  $a$  kann aus den Zeilen- und Spalten-Summen in der ursprünglichen Vierfeldertafel (Tabelle 1) gemäss der oben angegebenen Gleichung Gl. 2 berechnet werden. Zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für  $b_e$ ,  $c_e$  und  $d_e$  ergibt sich:

$$a_e = \frac{(a+b)(a+c)}{n}, \quad b_e = \frac{(a+b)(b+d)}{n}, \quad c_e = \frac{(a+c)(c+d)}{n} \quad \text{und} \quad d_e = \frac{(b+d)(c+d)}{n} \quad (\text{Gl. 4})$$

Die im gegebenen Beispiel zu erwartende Werte, die im Allgemeinen nicht ganzzahlig sein werden, sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben:

Merkmale:	A (Rauchend):	$\bar{A}$ (Nicht rauchend):	Total:
$B$ (Mann):	$a_e = 16.8$	$b_e = 43.2$	$a + b = 60$
$\bar{B}$ (Frau):	$c_e = 11.2$	$d_e = 28.8$	$c + d = 40$
Total:	$a + c = 28$	$b + d = 72$	$n = a+b+c+d = 100$

**Tabelle 2: Vierfeldertafel mit den unter  $H_0$  zu erwartenden Werten**

#### 4. Bestimmung der Testgrösse

Die Testgrösse  $\chi^2$  ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Beobachtung das Merkmal A auftritt, so ist die Anzahl  $a$  – unter der Annahme, dass die Nullhypothese  $H_0$  gültig ist – binomialverteilt mit dem Mittelwert  $(a + b) p$  und der Varianz  $\sigma_a^2 = (a + b) p (1 - p)$ . Das Entsprechende gilt für  $c$ , mit Mittelwert  $(c + d) p$  und Varianz  $\sigma_c^2 = (c + d) p (1 - p)$ . Die unbekannte Wahrscheinlichkeit  $p$  muss aus den Häufigkeiten abgeschätzt werden:

$$p \approx \frac{a + c}{n}, \quad (\text{Gl. 5})$$

wobei  $n$  gleich der Gesamtzahl aller Beobachtungen ist:  $n = a + b + c + d$ .

Bei Gültigkeit der Hypothese  $H_0$  sind die Quotienten  $\frac{a}{a + b}$  und  $\frac{c}{c + d}$  zwei voneinander unabhängige, normalverteilte Zufallsgrössen mit gleichem Mittelwert. Ihre Differenz

$$x := \frac{a}{a + b} - \frac{c}{c + d} \quad (\text{Gl. 6})$$

ist daher bekanntlich wiederum normalverteilt, und zwar mit dem Mittelwert Null und der Summe der Einzelvarianzen als Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_a^2}{(a + b)^2} + \frac{\sigma_c^2}{(c + d)^2} = p(1 - p) \left( \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c + d} \right). \quad (\text{Gl. 7})$$

Wie oben bereits erwähnt (vgl. Gl. 3; Spezialfall), ist das Quadrat einer standardnormalverteilten Grösse  $\chi^2$ -verteilt mit Freiheitsgrad 1. Genau dies ist für den Quotienten  $\left( \frac{x^2}{\sigma^2} \right)$  der Fall. Mit den konkreten, im Experiment gefundenen Werten von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  kann darum gerade dieser Quotient  $\left( \frac{x^2}{\sigma^2} \right)$  als Vergleichs- respektive Testgrösse  $\chi^2$  verwendet werden.

Setzen wir für  $p$  den Schätzwert  $p = \frac{a + c}{n}$  gemäss Gl. 5 ein, ergibt sich dafür

$$\chi^2 = \left( \frac{x^2}{\sigma^2} \right) = \frac{\left( \frac{a}{a + b} - \frac{c}{c + d} \right)^2}{\frac{a + c}{n} \left( 1 - \frac{a + c}{n} \right) \left( \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c + d} \right)} \quad (\text{Gl. 8})$$

was etwas unhandlich erscheint, aber leicht vereinfacht werden kann:

$$\chi^2 = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)} \quad (\text{Gl. 9})$$

Das so berechnete  $\chi^2$  ist auch gleich der Summe der Quotienten aus den Abweichungsquadraten der vier Zahlen von ihren Erwartungswerten und dem jeweiligen Erwartungswert selber, was sich durch Einsetzen sofort verifizieren lässt:

$$\chi^2 = \frac{(a - a_e)^2}{a_e} + \frac{(b - b_e)^2}{b_e} + \frac{(c - c_e)^2}{c_e} + \frac{(d - d_e)^2}{d_e} \quad (\text{Gl. 10})$$

### 5. Entscheidung

Wie oben schon angedeutet, ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich 1, da aus den vier beobachteten Zahlen a, b, c und d die Wahrscheinlichkeit  $p_1$  für das Merkmal A und die Wahrscheinlichkeit  $p_2$  für das Merkmal B bestimmt wurden und ausserdem der Zusammenhang  $a + b + c + d = n$  besteht.

In unserem Beispiel wird

$$\chi^2 = \frac{100 \cdot (20 \cdot 32 - 40 \cdot 8)^2}{(20 + 40)(20 + 8)(40 + 32)(8 + 32)} = 2.1164 \quad (\text{Gl. 11})$$

Dieses beobachtete  $\chi^2$  liegt weit unter dem Wert von 6.63, was einer kumulierten Wahrscheinlichkeit der  $\chi^2$ -Verteilung von 99% entspricht, aber auch unter der Grenze von 3.84, was einer kumulierten Wahrscheinlichkeit von 95% entspricht: Diese Zahlen sprechen – auf einem 5% – Niveau – nicht gegen die Nullhypothese  $H_0$ : Männer und Frauen scheinen gleich häufig zu rauchen.

Anders sieht es aus, wenn – in einer zweiten Stichprobe – für  $a = 12$ ,  $b = 48$ ,  $c = 16$  und  $d = 24$  gefunden wird, was zu  $\chi^2 = 4.7619 (> 3.84)$  führt. In diesem Fall ist die Nullhypothese auf einem 5%-Niveau zu verwerfen, wobei eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha < 5\%$  in Kauf genommen werden muss. Anschaulich argumentiert: Ein so grosser Wert für  $\chi^2$  lässt sich durch das "Wirken des Zufalls" nicht mehr erklären: Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Merkmalen A und B.

Bei diesem Test kann nur zweiseitig getestet werden. Wenn aber zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  entschieden werden muss, ergibt sich die Art des Zusammenhangs unmittelbar aus dem Zahlenmaterial selber: Frauen rauchen – in diesem zweiten fiktiven Beispiel – häufiger als Männer.

### 6. Erweiterung

Kommt das Merkmal A in  $k_A$  und das Merkmal B in  $k_B$  Ausprägungen vor, kann ein dem Vierfeldertest analoger Test für  $k_A \cdot k_B$  – Felder durchgeführt werden. Die Prüfgrösse ergibt sich zu

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k_A} \sum_{j=1}^{k_B} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (\text{Gl. 12})$$

wobei  $n_{ij}$  die Anzahl der Stichprobenelemente mit der Ausprägungskombination  $A_i$  und  $B_j$  bezeichnet, und  $e_{ij}$  deren erwartete Häufigkeit unter  $H_0$  bezeichnet. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist dabei  $(k_A - 1) \cdot (k_B - 1)$ .

### 7. Zusammenfassung

Vierfeldertafeln und der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest liefern mit bescheidenem Aufwand Grundlagen, um eine Vielzahl praktisch wichtiger Fragen korrekt entscheiden zu können, wie z.B.:

- Überleben mit Medikament A mehr an der gleichen Krankheit Erkrankte das erste Jahr nach der Diagnose als mit Medikament B?
- Liefert Produzent A eines Artikels mehr Ausschuss als Produzent B?
- Unterscheiden sich die Aufnahmezahlen von Studentinnen und Studenten an einer Hochschule?
- etc.

Wegen des guten Verhältnisses zwischen didaktischem Aufwand und erzielbarem Ertrag sowohl für die Theorie als auch für die Praxis sollte dieses Thema in keinem Statistikkurs fehlen.

### Literatur:

Theorie:

Van der Waerden, B.L., Mathematische Statistik, Springer-Verlag 1957,

Weiss, C., Basiswissen Medizinische Statistik, Springer-Verlag 2001,

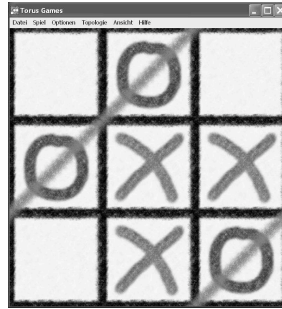
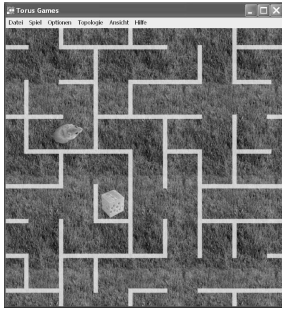
Bortz, J., Lehrbuch der Statistik, Springer-Verlag 1979.

Leicht verständliche Einführung in die praktische Anwendung statistischer Methoden, mit vielen Beispielen, in denen reale, publizierte Zahlen aus dem medizinischen Bereich verwendet werden:

Altman Douglas G., Practical Statistics for Medical Research, Chapman & Hall, London, 1991.

Lehrbuch zur schliessenden Statistik auf einführendem Niveau für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, mit vielen durchgerechneten praktischen Beispielen aus verschiedenen Bereichen:

Polasek Wolfgang, Schliessende Statistik, Springer-Verlag 1996.



## Hilfe beim Übersetzen vom Englischen ins Deutsche gesucht

Die Idee eines endlichen, grenzenlosen Universums lässt sich allein mit Worten kaum beschreiben. Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I können das Konzept jedoch leicht durch direkte Erfahrung erfassen. Mit der Software „Torus Games“ können Kinder wie auch Erwachsene diese Erfahrung direkt machen, indem sie acht bekannte Spiele auf einer Oberfläche spielen, die endlich ist, aber keine Grenzen hat (entweder ein Torus oder eine „Kleinsche Flasche“). Die Philosophie hinter den „Torus Games“ ist, einen vertrauten Ausgangspunkt zu vermitteln, damit die Lernenden sich ganz auf den spielerischen Umgang mit Problemen konzentrieren können, z.B. in Form von Irrgärten, „Drei Gewinnt“, Kreuzworträtsel, Schach, Pool-Billiard usw. Während die Lernenden diese Probleme lösen und Spiele spielen, entwickeln sie ein Bauchgefühl für die Beschaffenheit eines endlichen, grenzenlosen Raums. Leser sind eingeladen, diese Spiele von

[www.geometrygames.org/TorusGames](http://www.geometrygames.org/TorusGames)

herunterzuladen und selber auszuprobieren.

„Torus Games“ wurde bereits an Schulen der mittleren Stufe und High-Schools in den USA intensiv verwendet. In jüngster Zeit wurden sie auch in die Sprachen Französisch, Italienisch, Portugiesisch, Spanisch, und Vietnamesisch übersetzt. Ein Schweizer Gymnasiast hat eine Übersetzung ins Deutsche begonnen, konnte diese aber aus Zeitmangel nicht beenden. Wir suchen deshalb eine Person, die bereit wäre, freiwillig bei der Vollendung der Übersetzung mitzuhelfen. Die Konstruktion der Kreuzworträtsel und Wortsuch-Rätsel verläuft automatisiert. Trotzdem wird noch eine Person benötigt, welche die Hinweise für die Rätsel formuliert und bei der Übersetzung der Web-Inhalte mitwirkt. Diese Arbeit sollte im Prinzip nicht länger dauern als 3 bis 4 Stunden, aber die Erfahrungen aus den Übersetzungsprojekten in anderen Sprachen zeigen, dass daraus schnell 10 bis 20 Stunden werden können. Falls Sie Interesse haben, bei diesem Projekt mitzuarbeiten, nehmen Sie bitte Kontakt auf mit Jeff Weeks unter

[www.geometrygames.org/contact.html](http://www.geometrygames.org/contact.html)



La CRP a décidé d'offrir aux enseignants l'occasion d'aborder des applications de la physique à un domaine presque quotidien : la médecine. Elle propose un matériel didactique à la fois adapté à des jeunes étudiants et à un plus large public sous la forme d'une exposition.

L'originalité de ce travail tient au fait que ses concepteurs ne sont ni des médecins, ni des spécialistes des techniques, mais des pédagogues expérimentés. Chaque volet de l'exposition a été pensé de telle sorte qu'il puisse être abordé par des élèves se préparant à la maturité gymnasiale. La suite de posters peut être parcourue directement et en solitaire, mais elle profiterait du soutien que les enseignants de physique, de biologie ou de chimie peuvent apporter à leur lecture. Ainsi, ce travail est mis à la disposition des collègues de Suisse romande, en prêt. Une structure de réservation est mise en place directement sur le site Internet de la CRP.

Cette exposition, sur l'imagerie médicale, se nomme :

## **Physique et médecine**

Elle est composée de 24 posters A1 et d'un DVD d'une dizaine de minutes.

### **L'exposition s'articule autour de cinq axes :**

1. La radiographie.  
Cette méthode est abordée exclusivement par l'intermédiaire d'un film historique, mis à disposition par le Musée Belge de la Radiologie, Bruxelles.
2. Les ultrasons (6 panneaux).
3. La tomographie par émission de positons (6 panneaux)
4. L'imagerie par résonance magnétique nucléaire (7 panneaux).
5. Le CTscan (4 panneaux).

La Commission Romande de Physique remercie la SATW pour son soutien financier.

Pour plus de détails et vérifier la disponibilité de l'exposition, vous pouvez consulter le site de la CRP : [www.vsmp.ch/crp](http://www.vsmp.ch/crp) ou contacter son président ([phil.drompt@swissonline.ch](mailto:phil.drompt@swissonline.ch)).

Afin que vous puissiez vous rendre compte du contenu pédagogique de cette exposition, je vous en propose un extrait tiré du troisième thème.

J'espère que cet avant goût vous séduira et que vous pourrez faire bon accueil à l'exposition.

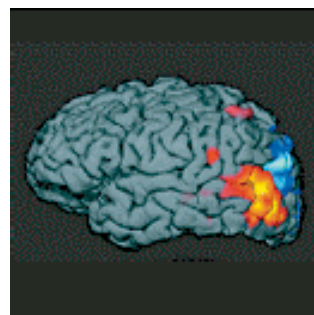
Philippe Drompt, président de la CRP

## La Tomographie par Emission de Positons

Tout de force et rassemblement de connaissances en physique, chimie, biologie et informatique, la TEP permet d'observer comment des molécules de sucre, dopées au fluor radioactif, sont traitées par les cellules du corps humain. En effet, lorsque l'activité physiologique est grande, les cellules consomment beaucoup de glucose, dans le cas contraire, peu. Ce phénomène est utilisé pour repérer les zones actives dans le corps humain.

### Mais comment voir le glucose consommé ?

Certains éléments radioactifs émettent spontanément des électrons positifs (antiélectron) qui en étant très rapidement absorbés par un électron de la matière, produisent deux rayonnements  $\gamma$  de sens opposés. Ces rayonnements peuvent être captés par un système de caméras, puis traités électroniquement afin de localiser leur source avec précision. Enfin, une image tridimensionnelle est construite à partir des sources détectées.

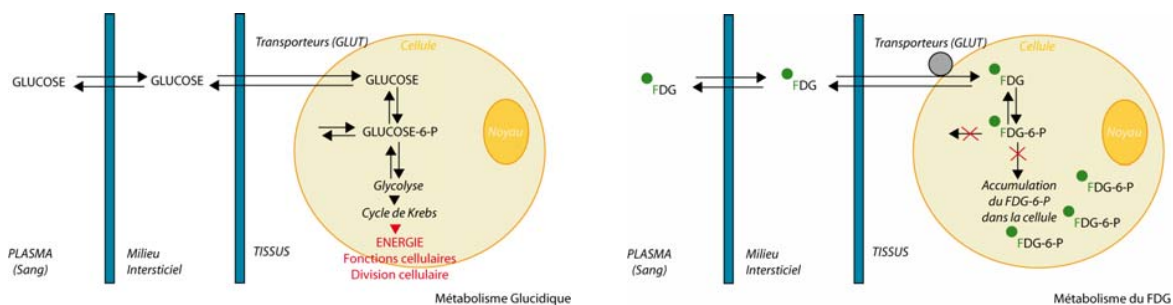


Contrairement à l'imagerie par rayon X qui donne une image de la structure anatomique, la technique PET donne des images du fonctionnement des organes du corps humain.

Certaines cellules sont plus actives ou agressives que les cellules normales. Elles consomment donc davantage de glucose et accumulent massivement le glucose radioactif.

### Comment le glucose radioactif est-il stocké dans les cellules ?

Le glucose est la principale source d'énergie de l'organisme. Il pénètre dans les cellules, y est dégradé lors du cycle de Krebs et leur permet de fonctionner et de se diviser.



Quant au glucose radioactif, il n'entre pas dans le cycle de Krebs et s'accumule dans la cellule sous forme de FDG-6 phosphate.

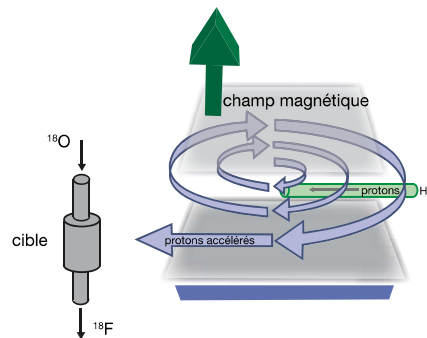
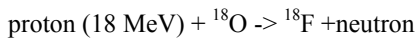
### Les émetteurs de positons utilisés en PET

Le fluor est l'isotope le plus largement utilisé en PET et comme sa durée de demi-vie est d'environ deux heures, il peut être utilisé à une certaine distance du site de production. Il existe d'autres atomes utilisés en médecine: carbone, azote, oxygène. La synthèse de ces trois émetteurs de positons nécessite un cyclotron sur place.

Atome	Isotope	Demi-vie
Carbone	$^{11}\text{C}$	20,4 min
Azote	$^{13}\text{N}$	9,96 min
Oxygène	$^{15}\text{O}$	2,07 min

### Production du fluor 18

Les noyaux radioactifs sont obtenus par bombardement de cibles d'oxygène 18 avec des protons accélérés dans un cyclotron. La demi-vie du  $^{18}\text{F}$  est de 109 minutes.

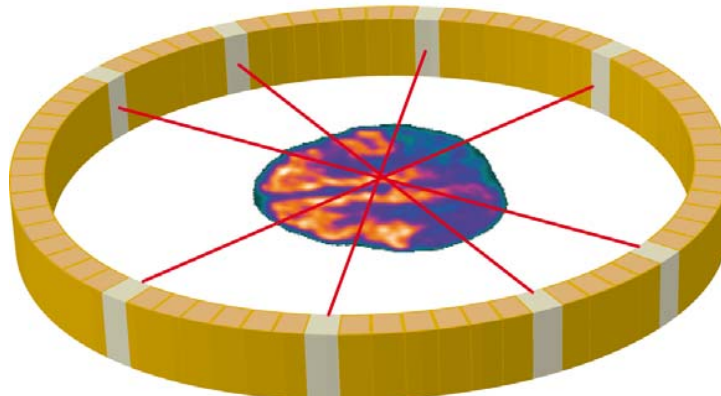


### Formation des gammas

L'atome de Fluor  $^{18}\text{F}$  émet un positon qui s'échappe du noyau et après un parcours très bref de quelques dixièmes de millimètre dans la matière, rencontre un électron appartenant à un autre atome. Les deux disparaissent en se transformant en énergie sous la forme de deux rayons gamma de même direction mais de sens opposés. Cette simultanéité permet de distinguer ces rayons gamma des autres produits par la radioactivité naturelle du corps humain.

### Détection des gammas

A l'endroit où se trouve une concentration de 18-FDG se produisent des millions de paires de gamma. Ceux-ci seront détectés par des caméras disposées en anneau autour du patient.



### Domaines d'application

- La TEP est utilisée pour diagnostiquer diverses maladies neurologiques et psychiatriques. Par exemple la maladie d'Alzheimer, la maladie de Parkinson, l'épilepsie et les diverses pathologies consécutives aux accidents vasculaires cérébraux. Elle permet également de contrôler l'évolution de ces maladies et l'efficacité des traitements médicaux.
- La TEP permet de localiser avec précision les tumeurs et contrôler leur évolution. L'utilisation de la radioactivité en médecine permet aussi bien de traiter les tumeurs que d'observer les effets du traitement.
- D'autres affections comme la schizophrénie, l'autisme, l'infectiologie par exemple, peuvent être investiguées avec la TEP. Toutefois, les démarches liées à ces investigations restent encore du domaine de la recherche.



## De la composition de taux à l'espace vectoriel des taux

Marcel Déléze, Collège du Sud, 1630 Bulle

Dans la majorité des livres scolaires, les chapitres consacrés à l'utilisation des taux font intensément appel à des notions voisines. Par exemple, l'étude des intérêts composés est fondée sur la notion de valeur acquise. Dans les problèmes qui s'y prêtent, pourrait-on ne calculer qu'avec des taux ? Comment plusieurs taux se combinent-ils pour former un seul taux global ?

Chemin faisant, nous visiterons des structures algébriques: groupe commutatif,  $\mathbb{Z}$ -module à gauche, espace vectoriel réel et isomorphisme d'espaces vectoriels.

### § 1 Le groupe commutatif des taux

#### ■ § 1.1 Composition de taux

Si une grandeur positive augmente de 20% puis de 30%, le taux global d'augmentation est  $(1 + 0.2)(1 + 0.3) - 1 = 0.56$ , ce que nous voulons traduire par une loi de composition en notation additive  $20\% \oplus 30\% = 56\%$ .

Si une grandeur positive subit une variation d'un taux égal à  $-1$ , la grandeur en question devient nulle. Pour éviter les transitions irréversibles, limitons les taux admissibles aux nombres réels supérieurs à  $-1$ :

$$\mathbb{T} = ] - 1; \infty [$$

Sur cet ensemble, définissons une loi de composition interne  $(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{T}$  comme suit

$$(a, b) \mapsto a \oplus b = (1 + a)(1 + b) - 1 = a + b + a \cdot b$$

Puisque  $1 + a > 0$  et  $1 + b > 0$ , il s'ensuit que  $(a \oplus b) > -1$ . La « somme »  $a \oplus b$  représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie d'un taux  $a$ , puis d'un taux  $b$ .

#### ■ § 1.2 Le groupe commutatif des taux

$(\mathbb{T}, \oplus)$  est un groupe commutatif. Vérifions d'abord l'associativité

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b + ab) \oplus c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

$$a \oplus b \oplus c = (1 + a)(1 + b)(1 + c) - 1$$

La composition de taux est commutative:  $b \oplus a = a \oplus b$

La composition de taux possède un élément neutre:  $0 \oplus a = a$

Chaque  $a \in \mathbb{T}$  possède un opposé  $b \in \mathbb{T}$  que nous notons  $\ominus a$ . En effet,

$$a \oplus b = 0 \iff a + b + ab = 0 \iff a + b(1 + a) = 0 \iff b = -\frac{a}{1 + a}$$

$$\ominus a = \frac{-a}{1 + a}$$

Question 1 Une grandeur positive a augmenté de 60 %. De quel taux doit-elle ensuite varier afin qu'elle retrouve sa valeur initiale ?

Réponse 1  $\ominus 60 \% = \frac{-0.6}{1.6} = -37.5 \%$

■ § 1.3 Résolution d'équations dans le groupe commutatif des taux

Question 2 Une grandeur positive ayant augmenté de 30%, quel est le taux d'une nouvelle augmentation afin que le taux global soit de 50%.

Réponse 2 Equation dans  $\mathbb{T}$ :  $0.3 \oplus x = 0.5$   
 Ajoutons l'opposé de 0.3 aux deux membres:  $x = 0.5 \oplus (\ominus 0.3)$   
 Valeur numérique  $x = 0.5 + \frac{-0.3}{1.3} + 0.5 \frac{-0.3}{1.3} = 0.153846$

§ 2 Le  $\mathbb{Z}$ -module à gauche des taux

■ § 2.1 Multiplication d'un taux par un entier relatif

Si une grandeur positive augmente 3 fois consécutivement de 20%, le taux global d'augmentation est  $(1 + 0.2)^3 - 1 = 0.728$ , ce que nous voulons traduire par une loi de composition en notation multiplicative  $3 \odot 20 \% = 72.8 \%$ .

Selon un procédé algébrique général, tout groupe commutatif peut être regardé comme un module à gauche sur l'anneau des entiers relatifs. Pour ce faire, on définit une multiplication extérieure  $\mathbb{Z} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $(n, a) \mapsto n \odot a$  comme suit.

Pour  $n$  positif,  $n \odot a$  représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie  $n$  fois du taux  $a$ :  $n \odot a = a \oplus a \oplus \dots \oplus a$  ( $n$  termes)  $= (1 + a)^n - 1$ .

Pour  $n = 0$ ,  $0 \odot a = 0 = (1 + a)^0 - 1$ .

Pour  $n$  négatif,  $n \odot a$  représente le taux global qui résulte lorsqu'une grandeur positive varie  $(-n)$  fois du taux opposé à  $a$ :

$$n \odot a = (-n) \odot (\ominus a) = (-n) \odot \left(\frac{-a}{1+a}\right) = \left(1 + \frac{-a}{1+a}\right)^{-n} - 1 = \left(\frac{1}{1+a}\right)^{-n} - 1 = (1 + a)^n - 1.$$

Finalement, quel que soit  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$n \odot a = (1 + a)^n - 1$

■ § 2.2 Le module à gauche des taux sur l'anneau  $\mathbb{Z}$

La construction précédente aboutit au module  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  sur l'anneau  $\mathbb{Z}$ . En particulier, les conditions suivantes sont vérifiées pour tous les  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et pour tous les  $a \in \mathbb{T}$ ,  $b \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} k \odot (n \odot a) &= (k \cdot n) \odot a & 1 \odot a &= a \\ (k + n) \odot a &= (k \odot a) \oplus (n \odot a) & n \odot (a \oplus b) &= (n \odot a) \oplus (n \odot b) \\ \ominus(n \odot a) &= (-n) \odot a \end{aligned}$$

■ § 2.3 Résolution d'équations dans le module des taux

Question 3 Une grandeur positive subit 12 augmentations consécutives de 8%, puis une treizième de taux inconnu. Le taux global ainsi obtenu est égal à celui qui résulte de 15 augmentations de 10%. Quel est le taux de la treizième augmentation ?

Réponse 3 Soit  $x$  le taux cherché. Equation  $(12 \odot 0.08) \oplus x = 15 \odot 0.1$   
 Résolution dans  $\mathbb{T}$ :  $x = (15 \odot 0.1) \oplus (\ominus(12 \odot 0.08)) = (15 \odot 0.1) \oplus ((-12) \odot 0.08)$   
 Calcul numérique:  $x = (1.1^{15} - 1) + (1.08^{-12} - 1) + (1.1^{15} - 1)(1.08^{-12} - 1) = 0.658843$

§ 3 L'espace vectoriel des taux

■ § 3.1 Multiplication d'un taux par un nombre réel

Si  $u$  est un taux par unité de temps et  $n$  le nombre d'unités de temps, alors  $n \odot u$  représente le taux global à l'instant  $n$ , ce qui donne aussi un sens au cas où  $n$  n'est pas entier.

Pour  $n \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{T}$ , définissons  $n \odot u = (1 + u)^n - 1$

■ § 3.2 L'espace vectoriel à gauche des taux sur le corps  $\mathbb{R}$

Avec la définition précédente,  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  est un espace vectoriel à gauche sur le corps  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour  $n \neq 0$ , l'équation  $n \odot x = a$  possède une et une seule solution  $x = (\frac{1}{n}) \odot a$ .

■ § 3.3 Résolution d'équations dans l'espace vectoriel des taux

Question 4 Une grandeur positive a subi 5 augmentations consécutives de 10%. On veut ramener l'augmentation globale à 20% en faisant varier la grandeur trois fois d'un même taux. Quel est ce taux ?

Réponse 4 Equation:  $(5 \odot 0.1) \oplus (3 \odot x) = 0.2$   
 Résolution dans  $\mathbb{T}$ :  $3 \odot x = 0.2 \oplus (\ominus(5 \odot 0.1)) = 0.2 \oplus ((-5) \odot 0.1)$   
 « multiplions » les deux membres par  $\frac{1}{3}$ :  
 $x = (\frac{1}{3}) \odot (0.2 \oplus ((-5) \odot 0.1)) = (\frac{1}{3} \odot 0.2) \oplus (\frac{-5}{3} \odot 0.1)$   
 Calcul numérique:  $x = (1.2^{\frac{1}{3}} - 1) + (1.1^{-\frac{5}{3}} - 1) + (1.2^{\frac{1}{3}} - 1)(1.1^{-\frac{5}{3}} - 1) = -0.0934204$

§ 4 Isomorphisme avec l' « espace des durées »

■ § 4.1 Durée d'un placement

Pour  $u \in \mathbb{T}$  et  $u \neq 0$ , la solution  $n \in \mathbb{R}$  de l'équation  $n \odot u = a$  est  $(1 + u)^n - 1 = a \iff n \cdot \ln(1 + u) = \ln(1 + a) \iff n = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)}$ , ce qui nous amène à

introduire la famille de fonctions  $\varphi_u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_u(a) = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)} = \log_{1+u}(1+a)$

Le taux par unité de temps  $u$  étant fixé,  $\varphi_u(a)$  est appelé « durée du placement qui produit le taux global  $a$  » ou « durée du placement pour obtenir le rendement  $a$  ».

Pour  $u \in \mathbb{T}$  et  $u \neq 0$ , nous avons montré que tout taux  $a$  se laisse écrire sous la forme  $n \odot u$ . En d'autres termes,  $\{u\}$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{T}$ ; donc  $\mathbb{T}$  est un espace vectoriel réel de dimension un.

**Question 5** En combien d'années un capital, placé à 5% l'an, s'accroît-il de 75% ?

**Réponse 5**  $\varphi_{0.05}(0.75) = \log_{1.05}(1.75) = \frac{\ln(1.75)}{\ln(1.05)} = 11.4698$

La durée peut être négative. Par exemple,  $\varphi_{-0.1}(0.8) = -5.57881$  unités de temps, ce qui situe l'état « 80% de plus qu'au temps 0 » dans le passé.

■ **§ 4.2 L'espace vectoriel des taux  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  et l'espace vectoriel des durées  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  sont isomorphes**

En effet, pour tout  $u \in \mathbb{T}$  et  $u \neq 0$ ,  $\varphi_u$  est bijective et sa réciproque est  ${}^r\varphi_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ ,

$$\boxed{{}^r\varphi_u(y) = (1 + u)^y - 1}$$

De plus,  $\varphi_u(a \oplus b) = \log_{1+u}(1 + (a \oplus b)) = \log_{1+u}(1 + a + b + ab) = \log_{1+u}((1 + a)(1 + b)) = \log_{1+u}(1 + a) + \log_{1+u}(1 + b) = \varphi_u(a) + \varphi_u(b)$

et  $\varphi_u(n \odot a) = \log_{1+u}(1 + (n \odot a)) = \log_{1+u}((1 + a)^n) = n \cdot \log_{1+u}(1 + a) = n \cdot \varphi_u(a)$

En particulier,  $\varphi_u(0) = 0$ ,  $\varphi_u(u) = 1$ ,  $\varphi_u(a) \odot u = a$ .

**Question 6** Si, pour des capitaux placés à un taux annuel donné, il faut attendre  $n_1$  années pour obtenir un rendement de 20% et  $n_2$  années pour obtenir un rendement de 30%, quel rendement obtient-on en attendant  $n_1 + n_2$  années ? Le résultat dépend-il du taux annuel ?

**Réponse 6** Par isomorphisme, le taux de rendement est  ${}^r\varphi_u(n_1 + n_2) = {}^r\varphi_u(n_1) \oplus {}^r\varphi_u(n_2) = 30\% \oplus 20\% = 56\%$ .

Le résultat est indépendant du taux annuel.

**Question 7** Soit  $a$  le taux de rendement correspondant à une durée déterminée. Si on multiplie la durée du placement par un facteur réel  $n$ , quel est le nouveau taux de rendement ?

**Réponse 7** Par isomorphisme, le taux de rendement est  ${}^r\varphi_u(n \cdot \varphi_u(a)) = {}^r\varphi_u(\varphi_u(n \odot a)) = n \odot a = (1 + a)^n - 1$ .

■ **§ 4.3 Résolution d'équations vectorielles via un isomorphisme**

Au lieu de résoudre une équation vectorielle dans  $\mathbb{T}$  avec les opérations  $\oplus$  et  $\odot$ , on peut, au moyen d'un isomorphisme, la transporter dans « l'espace des durées » où la résolution s'effectue avec les opérations usuelles  $+$  et  $\cdot$ . Le résultat est ensuite ramené dans  $\mathbb{T}$  au moyen de la réciproque de l'isomorphisme.

**Question 8** Une grandeur positive a subi 4 diminutions successives de 20%, puis, en cinq augmentations d'un même taux, le taux global est amené à +30%. Quel est le taux des cinq augmentations ?

**Réponse 8** Equation dans T:  $(4 \odot (-0.2)) \oplus (5 \odot x) = 0.3$   
 Choisissons arbitrairement  $u = 1$ .  $\varphi_1((4 \odot (-0.2)) \oplus (5 \odot x)) = \varphi_1(0.3)$   
 $4 \cdot \varphi_1(-0.2) + 5 \cdot \varphi_1(x) = \varphi_1(0.3)$   
 $\varphi_1(x) = (\varphi_1(0.3) - 4 \cdot \varphi_1(-0.2))/5 = 0.333245$   
 $x = {}^r\varphi_1(0.333245) = 2^{0.333245} - 1 = 0.259844$

**§ 5 Règle de réciprocité et rôle du taux par unité de temps**

$$\varphi_u(a) \cdot \varphi_a(u) = \frac{\ln(1+a)}{\ln(1+u)} \cdot \frac{\ln(1+u)}{\ln(1+a)} = 1, \text{ d'où } \boxed{\varphi_a(u) = \frac{1}{\varphi_u(a)}}$$

En mots: si on intervertit les rôles du taux de rendement et du taux par unité de temps, alors la durée correspondante est inversée. Par exemple, si, au taux annuel de 4%, le rendement de 60.1% est atteint en 12 ans, alors, au taux annuel de 60.1%, le rendement de 4% est atteint en un mois.

En combinant cette formule avec les propriétés de l'isomorphisme, on obtient, pour des taux  $a, u$  et  $v$  non nuls,  $\varphi_a(u \oplus v) = \varphi_a(u) + \varphi_a(v)$ , d'où

$$\boxed{\frac{1}{\varphi_{u \oplus v}(a)} = \frac{1}{\varphi_u(a)} + \frac{1}{\varphi_v(a)}}$$

et  $\varphi_a(n \odot u) = n \cdot \varphi_a(u) \implies \frac{1}{\varphi_{n \odot u}(a)} = \frac{n}{\varphi_u(a)}$  d'où

$$\boxed{\varphi_{n \odot u}(a) = \frac{\varphi_u(a)}{n}}$$

**Question 9** Pour qu'un capital croisse d'un taux  $a$  donné, on sait qu'il faut 13 ans si le taux annuel est  $u$ , et 17 ans si le taux annuel est  $v$ . Combien de temps faut-il si le taux annuel est  $u \oplus v$  ?

**Réponse 9** Soit  $n$  le nombre d'années pour obtenir le rendement  $a$  au taux annuel  $u \oplus v$ . D'après l'avant-dernière formule encadrée,  $\frac{1}{n} = \frac{1}{13} + \frac{1}{17} = \frac{30}{221}$ . Donc  $n = \frac{221}{30} = 7$  ans 134 jours.

**Question 10** Un capital est placé au taux annuel de 7% pendant quelques années. Quel devrait être le taux annuel pour que le même rendement soit obtenu en trois fois moins de temps ?

**Réponse 10** La dernière formule encadrée donne le taux annuel  $3 \odot 7\% = 22.5043\%$

## Kopernikanische Wende (A)

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Zürich

### Einleitung

Im Physikunterricht erzähle ich meinen Klassen – falls ich Zeit dazu habe – von der Kopernikanischen Wende. Üblicherweise zeige ich dann ein Bildchen vom geozentrischen und vom heliozentrischen System. Meistens trägt in diesen historischen Bildchen mit Kreisbahnen einfach der Zentralkörper einen anderen Namen, sonst gleichen sie sich. Damit werden aber die Schwierigkeiten, die Kopernikus hatte, und seine Leistung nur schwach dargestellt. In den folgenden Abbildungen (1a-9a) können Sie sich selbst in die Rolle des Kopernikus versetzen: Wie sieht die Bewegung des Planeten/Planetoiden aus, wenn sie im heliozentrischen System dargestellt wird? Die Lösung finden Sie im Bruderartikel "Kopernikus gewendet (B)" in diesem Heft.

Abbildungen 1-9: Vereinfachte geozentrische Darstellungen der Bahn eines Planeten oder Planetoiden. Der Himmelskörper bewegt sich in der Ekliptik entweder auf einer Kreisbahn mit anderer Umlaufzeit oder auf einer elliptischen Bahn mit gleicher Umlaufzeit. Die Position der Erde ist mit einem fetten Punkt markiert.

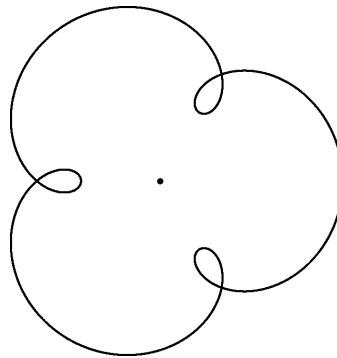


Abb. 1a

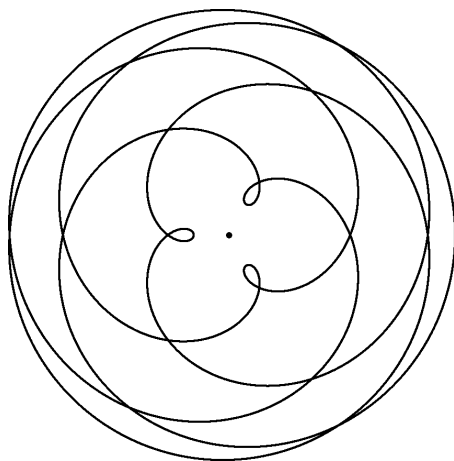


Abb. 2a

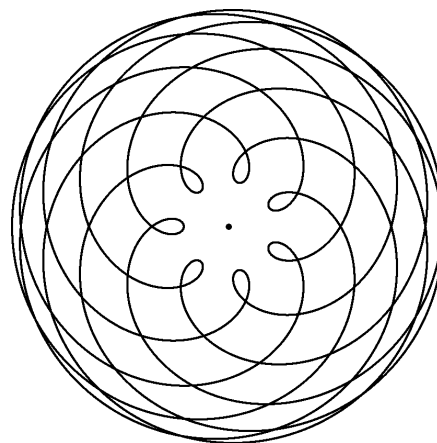


Abb. 3a

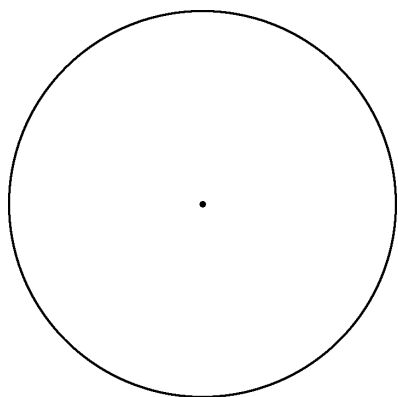


Abb. 4a

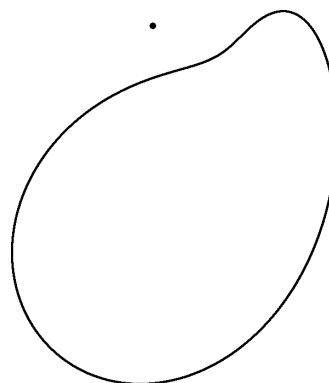


Abb. 5a

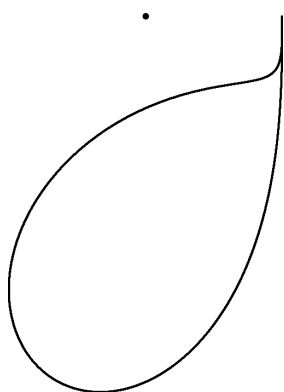


Abb. 6a



Abb. 7a

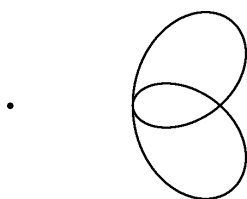


Abb. 8a

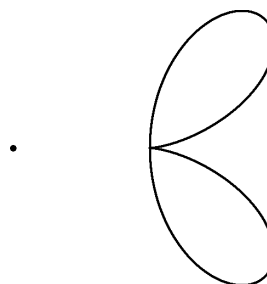


Abb. 9a

Mit Ausnahme von Abb. 3 sind alle Bilder im gleichen Massstab gezeichnet, insbesondere sind entsprechende Bilder im anderen Artikel im gleichen Massstab wiedergegeben. Die Bilder 3a und 3b sind beide im gleichen Verhältnis etwas verkleinert worden.

### Rückblick: Robotik im Gymnasium - 3.-5. Oktober 2007 ETH Zürich

Der Kurs hatte das Ziel, den Teilnehmenden einen praxisorientierten Zugang zur Robotik zu vermitteln und Einsatzmöglichkeiten im Unterricht aufzuzeigen. Obwohl die Anmeldungen zu Beginn sehr herzlich eintrafen, nahmen am Ende 28 Lehrkräfte am Kurs teil.

Der Kurs fand im Raum CLA E32 statt, der zum Autonomous Systems Lab der ETH Zürich gehört. Der Kursraum war zwar eher eng, was jedoch eine intensive Auseinandersetzung mit den gestellten Aufgaben keineswegs beeinträchtigte.

Die Kursteilnehmer durften zu Beginn das NXT Roboter Set von Lego Mindstorms in Empfang nehmen – gesponsort durch National Instruments, wofür an dieser Stelle herzlich gedankt sei – und die ebenfalls zur Verfügung gestellte Software Robolab installieren.

Nach einer Einführung durch Vance Carter waren die Teilnehmer gleich gefordert: In einem ersten, als Wettbewerb konzipierten Praxisblock galt es, in Zweiertteams einen Roboter zu bauen, der sich möglichst schnell fortbewegen sollte.

Überhaupt war der ganze Kurs sehr praxisorientiert und spielerisch angelegt, mit insgesamt vier Praxisblöcken, drei davon als Wettbewerb.

Im Robopong-Contest unter der Leitung von René Jung spielten jeweils zwei Roboter autonom gegeneinander um 15 Pingpongbälle mit dem Ziel, in 90 Sekunden möglichst viele Bälle ins gegnerische Feld zu bringen. Die einzelnen Teams realisierten die gestellte Aufgabe mit ganz unterschiedlichen Strategien, was dem Wettbewerb einen spannenden und heiteren Charakter verlieh.



Daneben durften die Teilnehmer das Artificial Intelligence Laboratory der Universität Zürich in Oerlikon und das Autonomous Systems Lab der ETH besuchen und so Einblicke in die aktuelle Forschung gewinnen. René Jung demonstrierte uns an "seiner" Kantonsschule Wiedikon Highlights aus seinen Unterrichtsmaterialien.

Der Kurs wurde von einer ganzen Reihe sehr kompetenter Referenten bestritten:

Dorit Assaf: Artificial Intelligence Laboratory, Universität Zürich

Vance Carter: EducaTec AG, Döttingen

René Jung: Kantonsschule Wiedikon, Zürich (Kursleitung)

Nathan Labhart, Artificial Intelligence Laboratory, Universität Zürich

Chris Rogers: Department of Mechanical Engineering, Tufts University, Medford, Massachusetts

Christian Schorno: Autonomous Systems Laboratory, ETH, Zürich (Kursleitung)

Roland Siegwart, Autonomous Systems Laboratory, ETH Zürich

Vera De Vries, Alstom Power Service, Baden

Gilles Caprari, Autonomous Systems Laboratory, ETH Zürich

Wir danken Christian Schorno / Vera de Vries vom Autonomous Systems Lab und ganz besonders René Jung für den hervorragend organisierten und geleiteten Kurs ganz herzlich.

31.12.07 / Stefan Walser DPK

## Kopernikus gewendet (B)

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, Zürich

### Einleitung

Beim umgekehrten kopernikanischen Problem soll aus der heliozentrischen Bewegung der Erde und eines anderen Himmelskörpers die geozentrische Bewegung erraten werden (natürlich ohne den Computer zu verwenden). Die folgenden Bilder (1b-9b) zeigen vereinfachte Planetenbewegungen: Die Bahnen liegen in derselben Ebene und die Erde bewegt sich auf einem Kreis. Die Verhältnisse der Umlaufzeiten sind einfach gewählt. Wie die zugehörige geozentrische Bewegung aussieht, kann man im Schwesterartikel "Kopernikanische Wende (A)" im gleichen Heft anschauen.

Abb. 1-9: Zwei Planeten oder Planetoiden laufen in gleicher oder verschiedener Zeit um die Sonne. Der Umlauf erfolgt gleichsinnig. Die Startpositionen sind mit fetten Punkten markiert, ebenso die Position der Sonne.

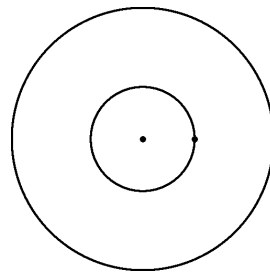


Abb. 1b:  $T_1: T_2 = 4:1$  (ca. Merkur-Erde)

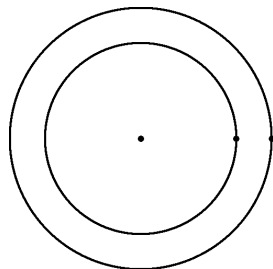


Abb. 2b:  $T_1: T_2 = 8:5$  (ca. Venus-Erde)

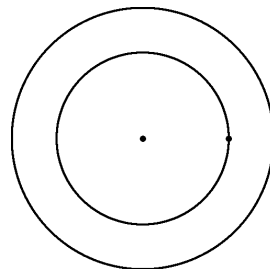


Abb. 3b:  $T_1: T_2 = 15:8$  (ca. Erde-Mars)

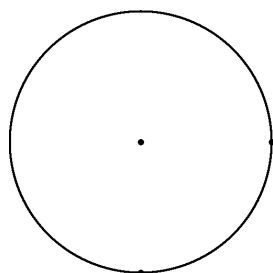


Abb. 4b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 0$

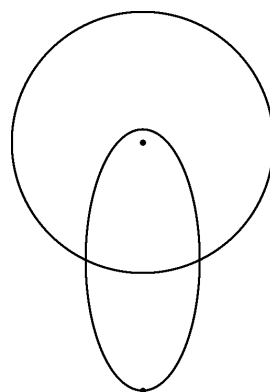


Abb. 5b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 0.9$

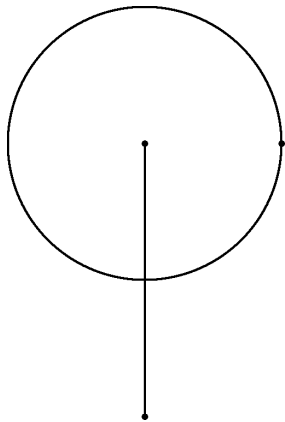


Abb. 6b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 1$   
Der 2. Himmelskörper fällt auf die Sonne.

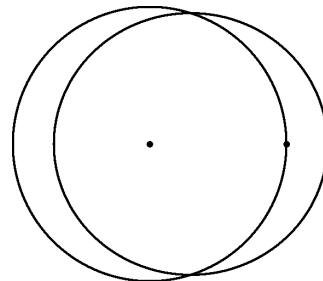


Abb. 7b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 0.3$

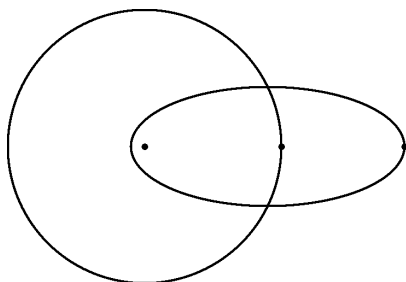


Abb. 8b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 0.9$

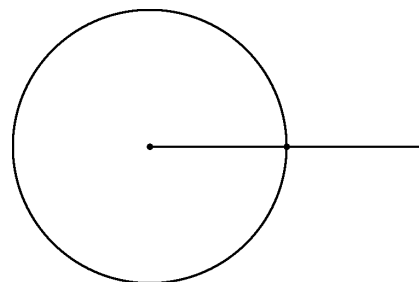


Abb. 9b: numerische Exzentrizität  $\varepsilon_2 = 1$   
Der 2. Himmelskörper fällt auf die Sonne.

Mit Ausnahme von Abb. 3 sind alle Bilder im gleichen Massstab gezeichnet, insbesondere sind entsprechende Bilder im anderen Artikel im gleichen Massstab wiedergegeben. Die Bilder 3a und 3b sind beide im gleichen Verhältnis etwas verkleinert worden.

In den Abbildungen 6b und 9b ist eine Ellipsenbahn mit numerischer Exzentrizität 1 gezeichnet. Man kann diese Bahn als sehr lang gestreckte Ellipse auffassen (dann ergibt sich ein vollständiger Umlauf) oder als freien Fall auf die Sonne (dann ergibt sich logischerweise nur ein halber Umlauf). Im Schwesterartikel habe ich einen ganzen Umlauf gezeichnet.



Universität Zürich  
Institut für Mathematik

## Kursprogramm Frühling 2008

**Kursleiterin:** Prof. Dr. Anna Beliakova

**Wann:** Jeden Mittwoch von 17.00-18.30 Uhr

**Wo:** Universität Zürich, Campus Irchel, Institut für Mathematik, Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich  
Gebäude 27, Vorlesungssaal H28 (Y27-H28)

**Start:** Mittwoch, 5. März 2008

**Anmeldung erwünscht unter:** [www.math.unizh.ch/jes](http://www.math.unizh.ch/jes)

## Junior Euler Society

Die Junior Euler Society des Instituts für Mathematik der Universität Zürich setzt sich zum Ziel, interessierte Mittelschülerinnen und Mittelschüler zu fördern. Sie bietet ihnen die Möglichkeit, sich in regelmässig angebotenen Kursen vertieft mit grundlegenden mathematischen Fragestellungen zu beschäftigen:

- an der Universität Zürich
- im Kreis von Gleichgesinnten
- unter wissenschaftlicher Anleitung.

### Wer kann mitmachen?

Angesprochen sind Mittelschülerinnen und Mittelschüler ab circa 15 Jahren. Wir erwarten von Ihnen, dass Sie Freude am selbständigen Denken und Interesse an mathematischen Fragestellungen mitbringen. Die Teilnahme ist kostenlos.

### Programm

Die mathematischen Fragen, die wir in der Junior Euler Society bearbeiten, entstammen verschiedenen Gebieten wie Algebra, Geometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie oder Kombinatorik. Die Aufgaben und Themen sind so formuliert, dass Sie keine speziellen Vorkenntnisse benötigen. Das Spannende besteht darin, selber Lösungswege zu entwickeln und dabei mathematische Begriffe und Methoden zu entdecken. Bei regelmässiger Teilnahme stellt die Junior Euler Society ein Zertifikat aus.

### Für mehr Informationen:

[www.math.uzh.ch/jes](http://www.math.uzh.ch/jes) und [jes@math.uzh.ch](mailto:jes@math.uzh.ch)

## Robotik im Gymnasium (Wiederholung)

Kursnummer: wbz\_  
Kurs Sprache: Deutsch

### Kursinhalte:

Der letztjährige Kurs war stark überbucht, deshalb bieten wir den gleichen Kurs noch einmal an. Die Teilnehmeranzahl ist auf 18 Personen beschränkt.

Roboter erkunden den Mars, operieren Menschen, bauen Autos und verändern die künftige Arbeits- und Lebenswelt der heutigen Gymnasiasten. Das Bauen und Programmieren von „klugen“ Robotern ist kreativ und eignet sich zum Vermitteln und Vernetzen von physikalischen und technischen Sachthemen; Probleme müssen im Team gelöst werden und fördern Kommunikations- und Kooperationskompetenzen. Der Kurs will Impulse geben und Unterrichtshilfen für Lehrerinnen und Lehrer bereitstellen. Diese Unterrichtshilfen unterstützen die Lehrkräfte beim erfolgreichen Gestalten eines Robotikkurses im Rahmen eines Projektes, einiger Projektstage, einer Arbeitsgemeinschaft oder eines Semesterkurses. In drei Halbtagen bringen wir die Lego Mindstorms NXT-Roboter dazu, Wettbewerbsaufgaben zu lösen.

Erfahrungsberichte und Unterrichtsmaterialien von Kollegen ergänzen die praktische Arbeit. Wir besuchen Robotik-Forschungslabors und erhalten Einblick in die Zukunft der Robotik.

- Zielgruppe: Physiklehrpersonen, Informatiklehrpersonen und an Technik interessierte Lehrpersonen
- Kursort: Zürich ETH Zentrum, Autonomous Systems Lab
- Kursdaten: Mittwoch 5.11.08- Freitag 7.11.08
- Anbieter: wbz Schweizerische Zentralstelle für die Weiterbildung der Mittelschulpersonen  
Tel.: 041 249 99 11, Fax: 041 240 00 79  
E-Mail: [wbz-cps@wbz-cps.ch](mailto:wbz-cps@wbz-cps.ch) Internet: [www.wbz-cps.ch](http://www.wbz-cps.ch)
- Kursleitung: Prof. Dr. Roland Siegwart, ETH Zürich  
René Jung, Bachtobelstrasse 84, 8045 Zürich  
Tel: 044 463 95 71, E-Mail: [rjung@swissonline.ch](mailto:rjung@swissonline.ch)
- Referent/innen: Prof. Dr. Roland Siegwart, Autonomous Systems Laboratory, ETH  
Dorit Assaf, Artificial Intelligence Laboratory, Universität Zürich  
Dr. Gilles Caprari, Autonomous Systems Laboratory, ETH  
Vance Carter, EducaTec AG  
René Jung, Kantonsschule Wiedikon, Zürich  
Nathan Labhart, Artificial Intelligence Laboratory, Universität Zürich  
Chris Rogers, Tufts University Massachusetts USA
- Kurskosten: 480.- (NXT Basisset von Lego Mindstorms und Software inbegriffen)
- Anmeldefrist: 28.07. 08 (Anmeldung über [webpalette.ch](http://webpalette.ch) -> WBZ-CPS -> Physik)

**Ja - Oui - Sì**

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 95.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 30.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra  Herr/M./Sig.  Prof.  Dr.

Name/Nom/Cognome: .....

Vorname/Prenom/Nome: .....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): .....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo: .....

(Land/Pays/Paese): .....

Email: ..... (Tel): .....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): .....

Sprache/Langue/Lingua: D  F  I.

Schule/école/scuola: ..... Kanton/canton/cantone: .....

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo  passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: [www.vsg-sspes.ch](http://www.vsg-sspes.ch)

# Letzte Gelegenheit im Technorama: Atom- und Kernphysik hautnah erleben!

Die Sonderausstellung „Der atomare Zoo“ dauert bis Sonntag 25. Mai. Mit 30 Experimentierstationen gelingt es, sogar in diesem schwer zugänglichen Bereich Physik erfahrbar zu machen: Dies betrifft sowohl Vorgänge, die mit dem ganzen Atom zu tun haben als auch „phänomenale“ Einblicke in den Atomkern.

Verschaffen Sie sich rasch und leicht einen Überblick über Inhalt und Gehalt dieses international beispiellosen Experimentierfeldes: [www.technorama.ch/prospekte.r8.o.htm/](http://www.technorama.ch/prospekte.r8.o.htm/) „Beschreibung der Exponate“

Oder fordern Sie unsere 12-seitige Druckschrift über [info@technorama.ch](mailto:info@technorama.ch) an.

Sie wissen aus eigener Erfahrung: Selbermachen ist das Wichtigste und die Grundlage jeder vorbegrifflichen Kenntnis von Wirklichkeit – ursprünglicher als jede noch so wortreiche Deutung.

Die **didaktische** Frage heisst: Durch welche Massnahmen kann das Lernen angeregt, erleichtert und nachhaltiger gemacht werden? Obgleich es kaum überzeugendere Erläuterungen als die eigene Erfahrung gibt, freuen wir uns, Ihnen für den Besuch Ihrer Schulklasse einen besonderen Dienst anzubieten:

Unser wissenschaftlicher Berater und massgeblicher Inspirator für die Exponate des „Atomaren Zoos“, **Dr. Rudolf Rüetschi, Kernphysiker und ehemaliger Mittelschul-Physiklehrer**, steht Ihnen gerne hilfreich zur Seite. Er führt Ihre Schüler(innen) stufengerecht in das Thema ein und begleitet sie auch beim Experimentieren. Einfach so weit Sie dies als Lehrperson wünschen.

**Diese Dienstleistung ist unentgeltlich – immer während den Öffnungszeiten von Dienstag bis Freitag (10 bis 17 Uhr) und gegen Voranmeldung, vorzugsweise auf [info@technorama.ch](mailto:info@technorama.ch)**

Wir freuen uns, wenn Sie Ihren Schüler(innen) die einmalige Gelegenheit verschaffen, dieses faszinierende Gebiet der Physik sozusagen "hands-on", nachhaltig einprägsam, kennen zu lernen.

**Und sich am Ende gar dafür begeistern!**



*Wenn Materie auf Antimaterie trifft...  
Was fast alle kennen, nämlich  $E = mc^2$ ,  
kann man bei diesem Versuch, wo sich  
Elektronen und Positron „begegnen“ und  
zu Gammastrahlung werden, miterleben.*

## Impressum

### Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

### Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch  
Gassackerstrasse 2 Tel. 079 79 89 770  
5618 Bettwil

### Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com  
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24  
1628 Vuadens

### Inserateverwaltung – *Publicité*

#### *Deutschweiz:*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch  
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36  
8184 Bachenbülach

#### *Suisse romande :*

Philippe Beney philippe.beney@bluewin.ch  
Av. Pratifori 10 Tel. 027 321 11 94  
1950 Sion

### Adressänderung – *Changement d'adresse*

*VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :*  
VSG – SSPES – SSISS  
Sekretariat, Postfach 8742  
3001 Bern

#### *Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch  
Gassackerstrasse 2 Tel. 079 79 89 770  
5618 Bettwil

### Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

#### *– Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 107 30.04.2008 (20.06.2008)  
Nr. 108 31.08.2008 (20.10.2008)  
Nr. 109 31.12.2008 (20.02.2009)

### Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

### Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch  
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862  
3902 Brig-Glis

### Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch  
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37  
8820 Wädenswil

### Deutscheschweizerische Physikkommission

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch  
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36  
8807 Freienbach

### Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch  
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15  
2503 Bienne

### Commission Romande de Physique

Philippe Drompt phil.drompt@swissonline.ch  
Rue des Tilles 23 Tél. 032 485 11 09  
2603 Péry

### Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch  
Via Vincenzo d'Alberti 13  
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

### Bestimmungen für Inserate und Beilagen

#### *– Tarifs pour les annonces et les annexes*

Ganzseitige Inserate Fr. 500.–  
Halbseitige Inserate Fr. 300.–  
Beilagen bis 20 g Fr. 500.–  
Beilagen über 20 g Nach Vereinbarung

### Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG  
Rorschacherstrasse 290  
9016 St. Gallen

### Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>